

5. Stetigkeit von Funktionen

AUFGABE 1: ϵ und δ Definition von Stetigkeit

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen stetig oder unstetig in bestimmten Werten des Definitionsbereiches sind.

a) Die Wurzelfunktion als eine Abb. von \mathbb{R}_+ nach \mathbb{R}_+ , definiert durch $x \mapsto \sqrt{x}$

b) Die Heaviside - Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} gegeben durch $x \mapsto H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

c) Die Funktion f , welche von $(-1, 1)$ nach \mathbb{R} abbildet und

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

d) Sei $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto g(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

e) Die Gauß-Klammer $[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, welche jedem x die Zahl $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} | k \leq x\}$ zuordnet.

AUFGABE 2: Stetigkeit und stetige Fortsetzbarkeit von Funktionen

Sind die folgenden Funktionen stetig? Kann man diese Funktionen in x_0 stetig fortsetzen?

a) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = x^x$ und $x_0 = 0$.

b) $h : \mathbb{R} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = \frac{x}{|x|} - x$$

und $x_0 = 0$.

AUFGABE 3: Umkehrfunktionen von stetigen Funktionen

Sei $S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und $f : [0, 2\pi) \rightarrow S$,

$$z \mapsto f(z) = e^{iz}.$$

Zeigen Sie, dass f stetig und bijektiv ist, die Umkehrfunktion f^{-1} jedoch nicht stetig ist.

AUFGABE 4: Polynome und deren Nullstellen

Gegeben sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^2 + 1$. Besitzt f eine Nullstelle in \mathbb{R} ? Begründen Sie Ihre Antwort!

AUFGABE 5: Eigenschaften stetiger Funktionen

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Zeigen Sie, dass f streng monoton ist.

Selbsttest

1. Wie ist die Stetigkeit einer Funktion definiert, wie sind äquivalente Formulierungen z.B. über Umgebungen definiert?
2. Was bedeutet, dass eine Funktion unstetig ist?
3. Wie lautet der Zwischenwertsatz für reelle Funktionen?
4. Wie ist der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ einer Funktion definiert?