4. Potenzreihen, gleichmäßige und punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen

AUFGABE 1: Konvergenzradius von Potenzreihen
Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Reihen definiert für alle $z \in \mathbb{C}$

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$$

b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m+1} \right) z^k \qquad \text{(geeignete Abschätzung wählen)}$$

c)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (3+4i)^k z^k$$

d)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k! \left(\frac{z}{k} \right)^k$$

e)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^n + b^n} \qquad \text{für} \quad a, b > 0 \quad \text{reell.}$$

AUFGABE 2: Wichtige Potenzreihen
a) Geben Sie die Potenzreihen der Exponentialfunktion, der Sinus- sowie der Cosinusfunktion und den hyperbolischen Cosinus- und Sinusfunktionen an und finden Sie eine Abschätzung für das Reihenrestglied der Exponential- und Sinusfunktion.

b) Beweisen Sie $\cosh z^2 - \sinh z^2 = 1$ mit Hilfe der Definition der hyperbolischen Funktionen über ihr Potentreihen.

AUFGABE 3: Summen von Potenzreihen
Berechnen Sie folgende Summen.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$ b) $1 - \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} - \cdots$

AUFGABE 4: Punktweise und Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen
Sei $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.
Wir definieren: Eine Funktionenfolge (f_n) heißt punktweise konvergent gegen eine Grenzfunktion f, wenn für jedes $x \in D$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{gilt.}$$

Eine Funktionenfolge (f_n) heißt gleichmäßig konvergent gegen eine Grenzfunktion f, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $x \in D$ und für alle $n \geq n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{gilt.}$$

a) Untersuchen Sie, ob die durch $f_n(x) := |\sin(x)|^n$, $n \in \mathbb{N}$ auf dem Intervall $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ definierte Folge von reellen Funktionen auf I konvergiert und bestimme gegebenenfalls ihren Limes. Ist diese Konvergenz gleichmäßig?
b) Wie lautet das Ergebnis bei Betrachtung der Funktionenfolge auf dem kleineren Intervall $I = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$?

SELBSTTEST:

1. Wie ist der Konvergenzradius einer Potenzreihe definiert?
2. Wann konvergieren Potenzreihen?
3. Was sind Funktionsfolgen und Funktionsreihen und wann konvergieren sie?