

### 3. Reihen

#### AUFGABE 1:

Welche der folgenden Reihen konvergiert?

$$\begin{array}{ll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} q^n & \text{mit } |q| < 1 \\ b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{(n!)^2} \\ c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \left( e - \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \right) & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k^2} \end{array}$$

#### AUFGABE 2: Alternierende Reihen, absolute Konvergenz

Welche der folgenden Reihen sind konvergent bzw. absolut konvergent?

$$\begin{array}{ll} a) \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n \sin n \frac{\pi}{2}} & e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} \\ b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} & f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \\ c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-n)^n}{2n^2} & g) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \sqrt[k]{k} \\ d) \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n \end{array}$$

#### ■ AUFGABE 3: Grenzwerte von Reihen

Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen.

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{für } |z| < 1$$

Hinweis : Verwenden Sie die **geometrische Summenformel**:

$$\sum_{i=0}^n z^i = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad \text{für } n \geq 0$$

und führen Sie einen Induktionsbeweis durch.

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1) \cdot \dots \cdot (n+k)} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

■ **AUFGABE 4: Umordnungen von Reihen**

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$  konvergiert, die Summe sei  $a$ . Es gilt  $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ . Finden Sie eine Umordnung dieser Reihe, so dass die Summe der Umordnung  $\frac{a}{2}$  beträgt. Wie lässt sich dieses Ergebnis mit dem Umordnungssatz für Reihen vereinbaren?

■ **AUFGABE 5: Cauchy-Produkt**

a) Es sei  $0 < z < 1$ ,  $a_k = z^k$  und  $b_k = (-z)^k$ . Berechnen Sie  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (b_n)$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{l=0}^n a_{n-l} b_l)$ .

■ b) Berechnen Sie  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k}$ . Verwenden Sie das Cauchyprodukt von  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$  mit sich selbst.

**SELBSTTEST:**

1. Was bedeutet Konvergenz und absolute Konvergenz von Reihen?
2. Was besagt das Wurzelkriterium, das Quotientenkriterium, das Majoranten- und Minorantenkriterium, das Cauchy-Kriterium, sowie das Leibniz-Kriterium?
3. Diese Kriterien sind nur hinreichende Bedingung für die Konvergenz bzw. absolute Konvergenz. Was bedeutet dies?
4. Für welche  $x \in \mathbb{R}$  ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$  absolut konvergent?
5. Für welche  $s \in \mathbb{Q}$  ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$  konvergent?
6. Wie ist die harmonische Reihe definiert, konvergiert sie?