Brückenkurs ANA I und LA I im WS 06/07 ANALYSIS I
Heiko Remling LA I, 23. Februar 2007
Diana Kaminski ANA I

2. Folgen

AUFGABE 1: Grenzwerte von Folgen

Berechnen Sie folgende Grenzwerte der Folgen:
a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^n$
b) $\sqrt[2n]{n}$

AUFGABE 2: Konvergente Folgen

Zeigen Sie mit Hilfe der Definition konvergenter Folgen, dass
a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n+2}{3n-1} = \infty$
b) $\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$

Hinweis: Verwenden Sie für b) die **Bernoullische Ungleichung**:

$$(1+a)^n \geq 1 + na \text{ für alle } \quad a \geq -1 \text{ und } \quad n \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Eigenschaften Monotonie und Beschränktheit, dass folgende Folge konvergiert.
■ c) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$

Hinweis: Verwenden Sie für c) die **Binomische Formel**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

AUFGABE 3: Konvergenzaussagen für Folgen

Beweisen Sie, dass
a) eine komplexe Folge (z_n) genau dann konvergiert, wenn sowohl Realteil als auch Imaginärteil konvergieren.
■ b) Aus $a_n \longrightarrow a$ und $b_n \longrightarrow b(\neq 0)$ folgt $a_n b_n \longrightarrow ab$ und $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}$.

AUFGABE 4: Doppelfolgen

Zu $n, m \in \mathbb{N}$ sei $a_{n,m} := (1 - \frac{1}{m+1})^{n+1}$. Bestimmen Sie

$$a = \lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} a_{n,m}) \text{und } \tilde{a} = \lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} a_{n,m})$$

AUFGABE 5: Teilfolgen, Häufungspunkte, Limes Inferior und Limes Superior

a) Geben Sie 4 verschieden konvergente Teilfolgen zu $z_n = (1 - \frac{1}{n}) i^n$ an. Welche Grenzwerte haben diese Teilfolgen?

b) Bestimmen Sie die Häufungspunkte, den Limes Superior $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup a_n$ und den Limes Inferior $\lim_{n\longrightarrow\infty} \inf a_n$ mit $a_n = \frac{2\sqrt{n}}{n+1} + i^{2n+1} \frac{n-1}{n+2}$. (Tipp: Unterscheiden Sie gerade und ungerade n)

AUFGABE 6: Cauchyfolgen

Zeigen Sie anhand der Definition von Cauchyfolgen, dass die durch
a) $a_n := \frac{1+4n^2}{2+2n^2}$
b) $f_n := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{2k+1}$ für $n \geq 0$
definierten Folgen Cauchyfolgen sind.

SELBSTTEST:

1. Wie ist die Konvergenz von Folgen definiert?
2. Was ist eine Cauchy-Folge?
3. Welche Kriterien für Konvergenz von Folgen gibt es?
4. Was ist das Cauchysche Konvergenzkriterium für reelle und komplexe Folgen?
5. Was besagt der Satz von Bolzano-Weierstraß über Häufungspunkte und was über Teilfolgen?
6. Was ist der Unterschied zwischen $\sup_{k\in\mathbb{N}} a_k$ und $\lim_{k\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} a_k$?