Brückenkurs ANA I und LA I im WS 06/07 ANALYSIS I
Heiko Remling LA I, 23. Februar 2007
Diana Kaminski ANA I

---

1 Vollständige Induktion, Reelle und Komplexe Zahlen, sowie Funktionen

AUFGABE 1: Induktionsbeweise

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}$$

b) Beweisen Sie: Für $n \geq 2$ und $0 < x_k < 1$, $1 \leq k \leq n$ gilt folgende Ungleichung:

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - x_k) > 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

AUFGABE 2: Injektivität, Surjektivität und Bijektivität
Entscheiden Sie ob Injektivität und / oder Surjektivität vorliegt.
Gegeben seien folgende Funktionen

$$f : A \longrightarrow B \qquad \text{und} \qquad g : B \longrightarrow C$$

a) f, g injektiv $\Longrightarrow$ $g \circ f$ ist injektiv oder surjektiv?
b) $g \circ f$ injektiv $\Longrightarrow$ f ist injektiv oder surjektiv?
c) $f \circ g$ injektiv, f surjektiv $\Longrightarrow$ g ist injektiv oder surjektiv?
d) f, g surjektiv $\Longrightarrow$ $g \circ f$ ist injektiv oder surjektiv?
e) $g \circ f$ surjektiv $\Longrightarrow$ g ist injektiv oder surjektiv?
f) $g \circ f$ surjektiv, g injektiv $\Longrightarrow$ f ist injektiv oder surjektiv?
g) f, g bijektiv $\Longrightarrow$ $g \circ f$ ist injektiv oder surjektiv und es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$?

AUFGABE 3: Beispiele zur Injektivität, Surjektivität und Bijektivität
Entscheiden Sie, ob folgende Funktion $f : A \longrightarrow B$ injektiv, surjektiv oder bijektiv sind? Gegebenfalls schränken Sie die Definitions- und Wertebereiche ein, so dass f bijektiv wird und bestimmen Sie dannach die Umkehrfunktionen.

1. $A = \mathbb{R}$, $B = [0, \infty)$, $f(x) = e^x$
2. $A = [0, \infty)$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$
3. $A = \mathbb{R} \backslash \{(k + \frac{1}{2})\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$
4. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$, $f(n) = \frac{1}{n}$
5. $A = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$, $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$

AUFGABE 4: Mächtigkeit von Mengen

Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ oder gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ sind.
$A = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, $B = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{Q}$, $C := \mathbb{N} \times \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} | x^n = 2 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$
Verwenden Sie den **Mächtigkeitssatz von Bernstein**:
Zwei Mengen M und N sind gleichmächtig, wenn es injektive Abbildungen $f : M \to N$ und $f : N \to M$ gibt.

AUFGABE 5: Komplexe Zahlen

a)Komplexe Zahlen z mit dem Betrag $|z|$ und dem Winkel φ können mit Hilfe der Polardarstellung $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ geometrisch interpretiert werden. Verdeutlichen Sie sich, was das Produkt und der Quotient von komplexen Zahlen, sowie das Inverse einer komplexen Zahl geometrisch bedeutet.
b) Berechnen Sie $\frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^8}$.
c)Zeigen Sie, dass die Lösungen $(w_k)_{1,\ldots,n}$ von $w^n = z$ mit festem $z \in \mathbb{C}$ geometrisch ein $n-$Eck bilden, verwenden Sie hierfür die Exponentialdarstellung komplexer Zahlen.
d)Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\frac{z}{1-i} + \frac{8+i}{i-2} = \frac{1}{2}\bar{z} - 3 - 2i$ an.

SELBSTTEST

1. Was bedeutet das Vollständigkeitsaxiom und das Intervallschachtelungsprinzip für die reellen Zahlen?
2. Was bedeutet Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von Funktionen?
3. Wann sind Mengen endlich, unendlich, abzählbar oder überabzählbar?