Übungsblatt 4 zur Vorlesung Diophantische Approximation, 1. Mai 2013
Abgabe am 07.05.2013

Aufgabe 1:

(a) Sei $\alpha = [a_0, \ldots, a_{n+1}]$ ein endlicher Kettenbruch mit Näherungsbrüchen $\frac{P_i}{Q_i}$ und mit $a_i \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$Q_n\alpha - P_n = \frac{(-1)^n}{a_{n+1}Q_n + Q_{n-1}}.$$

(b) Sei $\alpha = [a_0, \ldots, a_{n+1}]$ ein endlicher Kettenbruch mit $a_i \in \mathbb{R}$ und $a_i \geq 1$ für $i > 0$. Für $2 \leq i \leq n+2$ sei $\beta_i = \frac{Q_{i-2}}{Q_{i-1}}$. Zeigen Sie

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \frac{1}{Q_n^2(a_{n+1} + \beta_{n+1})}.$$

(c) Finden Sie die Kettenbruchentwicklung von $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
(d) Sei $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} Q_n^2 \left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

und schließen Sie, dass es für $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$ nur endlich viele Näherungsbrüche $\frac{P_n}{Q_n}$ von α gibt, sodass

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{c}{Q_n^2}.$$

Aufgabe 2:

Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit Kettenbruchentwicklung $[a_0, a_1, \ldots]$, Näherungsbrüchen $\frac{P_i}{Q_i}$ und vollständigen Quotienten α_i. Für $i \geq 2$ sei $\beta_i = \frac{Q_{i-2}}{Q_{i-1}}$. Sei $n \geq 2$.
(a) Zeigen Sie, dass aus $\alpha_i + \beta_i \leq \sqrt{5}$ für $i = n, n-1$ die folgende Abschätzung folgt:

$$\beta_n > \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \leq \sqrt{5}$.)
(b) Zeigen Sie, dass

$$\alpha_i + \beta_i > \sqrt{5}$$

für ein $i \in \{n-1, n, n+1\}$ gelten muss.
(Hinweis: Verwenden Sie z. B. die Ungleichung $1 \leq a_n = \frac{Q_n - Q_{n-2}}{Q_{n-1}}$ für einen Widerspruchsbeweis.)
(c) Beweisen Sie den folgenden Satz von Borel (1903):
Für mindestens ein $i \in \{n-1, n, n+1\}$ gilt

$$\left|\alpha - \frac{P_i}{Q_i}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}Q_i^2}.$$

(d) Beweisen Sie den folgenden Satz von Hurwitz (1891):

(i) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gibt es unendlich viele $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

(ii) Hierbei ist $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$ die optimale Konstante, d.h. die Aussage ist falsch für $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Aufgabe 3:
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und seien $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $q \geq 1$ und

$$\alpha - \frac{p}{q} = \frac{\varepsilon\theta}{q^2} \neq 0,$$

wobei $0 < \theta < \frac{1}{2}$ und $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ gelten. Sei $\frac{p}{q} = [b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}]$ diejenige Kettenbruchentwicklung von $\frac{p}{q}$, für die $(-1)^{n-1} = \varepsilon$ gilt und seien $\frac{P_0}{Q_0}, \ldots, \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ die Näherungsbrüche dieses Kettenbruchs.
(a) Zeigen Sie, dass es ein $\omega \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\alpha = \frac{\omega P_{n-1} + P_{n-2}}{\omega Q_{n-1} + Q_{n-2}}.$$

(b) Zeigen Sie

$$\theta = \frac{Q_{n-1}}{\omega Q_{n-1} + Q_{n-2}}.$$

(c) Schließen Sie $\omega > 1$.