

Aufgaben zum Vorkurs Mathematik: Funktionen und Gleichungen

Für Dienstag den 27.9.2011

Aufgabe 1:

Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen:

- (a) $f(x) = \sqrt{x}$, (b) $f(x) = x^3$, (c) $f(x) = 1/x$,
(d) $f(x) = x^4$, (e) $f(x) = 1/x^2$.

Aufgabe 2:Ist die Gerade $x = 1$ der Graph einer linearen Funktion $f(x) = mx + b$?**Aufgabe 3:**Seien X, Y Mengen und sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion mit Graph $G_f \subseteq X \times Y$. Finden Sie Bedingungen an G_f , die dazu äquivalent sind, dass f

- (a) injektiv ist;
(b) surjektiv ist;
(c) bijektiv ist.

Wenn Ihnen die abstrakte Definition des Graphen G_f Schwierigkeiten bereitet, betrachten Sie zunächst den Fall $X = Y = \mathbb{R}$.**Aufgabe 4:**

Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

- (a) $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto -\sqrt{x}$,
(b) $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto \sqrt{x}$,
(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$ gerade ist,
(d*) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$ ungerade ist.

Aufgabe 5:(a) Seien p, q zwei nichttriviale Polynomfunktionen, sodass q von p geteilt wird. Zeigen Sie, dass dann $\deg(p) \leq \deg(q)$ gilt.(b*) Folgern Sie, dass eine Polynomfunktion p vom Grad $\deg(p) = n \geq 0$ höchstens n Nullstellen haben kann.(c*) Gibt es eine Polynomfunktion p vom Grad 3, die keine reelle Nullstelle besitzt?**Aufgabe 6:**(a) Zeigen Sie, dass $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.(b) Zeigen Sie, dass $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.

(c*) Finden Sie einen geometrischen Beweis der Aussage aus (b), z.B. unter Verwendung

eines gleichseitigen Dreiecks.

Aufgabe 7:

Finden Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen:

(a) $3x^2 - 3x - 6 = 0$,

(b) $x^2 + 6x + 9 = 0$,

(c) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{20}{3}x + \frac{68}{3} = 0$.

Aufgabe 8:

Beweisen Sie die pq -Formel.

Aufgabe 9:

Finden Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen:

(a) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$,

(b) $x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{2}{3} = 0$,

(c) $x^4 + x^2 - 20 = 0$.

Aufgabe 10:

Finden Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{3x}$.

Aufgabe 11:

Seien $a, b \in X \subseteq \mathbb{R}$, sei $c \in \mathbb{R}$ und sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Unter welchen Bedingungen gilt $A \Rightarrow B$ für die folgenden Aussagen A, B . Wann gilt sogar $A \Leftrightarrow B$?

(a) $A : a = b, \quad B : ac = bc$,

(b) $A : a = b, \quad B : a^2 = b^2$,

(c) $A : a = b, \quad B : f(a) = f(b)$,

(d) $A : a > b, \quad B : a + c > b + c$,

(e) $A : a > b, \quad B : ac > bc$,

(f) $A : a > b, \quad B : f(a) > f(b)$.

Aufgabe 12:

Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{7-4x}{1+2x} < -4$.