Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Jan Christian Rohde

Übungsaufgaben 85-88 zur Abgabe zu Beginn der Vorlesung am 10.06.2011.
Sie können die Lösungen in Zweiergruppen erstellen. Alle Personen müssen dann aber der gleichen Übungsgruppe angehören.

Aufgabe 85:(*10 Punkte*)
Der Abstand $d(E,0)$ der Ebene

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + 3y + z + 2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

zum Nullpunkt $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Standardnorm $\|\,.\,\|_2$ ist definiert als das Infimum der Menge $\{\,\|\,(x,y,z)\,\|_2 \,|\, (x,y,z) \in E\}$.
Finden Sie eine Submersion $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $h^{-1}(0) = E$ und bestimmen Sie $d(E,0)$ durch Minimierung der Funktion

$$(x,y,z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2$$

auf E mit Hilfe der Methode der Lagrangemultiplikatoren. Warum handelt es sich bei dem gefundenen lokalen Extremum um ein globales Minimum?

Aufgabe 86:(*10 Punkte*)
Sei

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \longmapsto (x + y^2 + 2xz, x^2 + 2xy^2 + 4x^2z + y^4 + 4xy^2z + 4x^2z^2).$$

Finden Sie Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, so dass für offene Umgebungen $V \subset \mathbb{R}^3$ von $(0,0,0)$ und $W \subset \mathbb{R}^2$ von $(0,0)$ die eingeschränkten Abbildungen $\varphi|_V$ und $\psi|_W$ Diffeomorphismen auf ihr Bild sind, so dass gilt:

$$\forall\,(x,y,z) \in \varphi(V) : \; (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x,y,z) = (x,0)$$

Bestimmen Sie den Rang der Abbildung f.
(Hinweis: Für $f = (f_1, f_2)$ hat man hier $f_2 = f_1^2$.)

Aufgabe 87:(*3+3+4 Punkte*)
Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen zu den gegebenen Anfangsbedingungen:

a)

$$x' = \cos(t) + \cos(t)x^2, \quad x(0) = 0$$

(Hinweis: Trennung der Variablen)

b)

$$x' = \frac{x}{t} + 1, \quad x(1) = 0$$

(Hinweis: Euler-homogene Differentialgleichung)

c)

$$x' = (-t + x + 1)^2, \quad x(0) = 1$$

(Hinweis: Formen Sie die Differentialgleichung durch eine geeignete Substitution in eine autonome Differentialgleichung um.)

Aufgabe 88:(*10 Punkte*)
Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}''(t) = \begin{pmatrix} (x_1'(t))^2 \cdot x_2(t) + \sin(x_1(t)) \\ 25 \cdot e^{x_1(t)x_2'(t)} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Finden Sie ein Vektorfeld

$$V : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,$$

so dass jede C^1-Kurve

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^4,$$

$\varepsilon > 0$, genau dann eine Integralkurve von V ist, wenn

$$(x_1, x_2) : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto (\gamma_1(t), \gamma_3(t))$$

eine Lösung von (1) ist und

$$\gamma_1' = \gamma_2 \quad \text{sowie} \quad \gamma_3' = \gamma_4$$

gilt.