

Übungsaufgaben 66-68 zur Abgabe zu Beginn der Vorlesung am 06.05.2011.
Sie können die Lösungen in Zweiergruppen erstellen. Alle Personen müssen dann aber der gleichen Übungsgruppe angehören.

Aufgabe 66: (10 Punkte)

Bestimmen Sie für die symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$, die durch die folgende darstellende Matrix M gegeben ist, die Normalform im Sinne des Trägheitssatzes von Sylvester:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Es kommt nur auf die Anzahl der positiven und negativen Eigenwerte an.

Aufgabe 67: (16+8 Punkte)

Betrachten Sie den reellen Vektorraum der beschränkten Funktionen

$$V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists C > 0 : f([0, 1]) \subset [-C, C]\}$$

mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_{\infty} = \sup \{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\}.$$

- a) Beweisen Sie, dass $(V, \|\cdot\|_{\infty})$ ein Banachraum ist. Insbesondere ist dabei die Vollständigkeit zu beweisen.
- b) Beweisen Sie, dass $(V, \|\cdot\|_{\infty})$ kein Hilbertraum ist.

Aufgabe 68: (6 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto \begin{cases} -1 & , \quad x \leq 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}.$$

Finden Sie eine offene Teilmenge von \mathbb{R} , die bezüglich f kein offenes Urbild hat.