Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Jan Christian Rohde

Probeklausur

Mathematik für Physiker II
SS 2011

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

05.07.2011

Nachname: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnr: ____________________

Es dürfen alle Vorlesungsunterlagen inklusive Übungsaufgaben und Lösungen verwendet werden. Untersagt ist jedoch die Benutzung eines Taschenrechners und anderer elektronischer Geräte. Jede zusätzliche beschriebene Seite muss mit Namen und Matrikelnummer beschriftet werden.

---

von den Korrektoren auszufüllen:

____

Note nach Klausurpunkten

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12

$\sum$:

1. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Beweisen Sie, dass $\mathrm{SL}(2,\mathbb{K})$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{K})$ ist.

2. Sei
$$\sigma \;=\; (1\,5\,6)\,(2\,3) \;\in\; S_6.$$
Bestimmen Sie die Determinante der Permutationsmatrix $(e_{\sigma(1)} \ldots e_{\sigma(6)})$.
Begründen Sie Ihr Ergebnis.

3. Es sei
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
Welche der folgenden Matrizen ist $\left((-1)^{i+j} \det \left(A_{ji}\right)_{i,j}\right)$, wobei A_{ij} die (i,j)-te Streichungsmatrix von A ist?
$$M_1 = \begin{pmatrix} b & -d \\ -a & c \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix},$$
$$M_3 = \begin{pmatrix} -a & c \\ b & -d \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$
$$M_5 = \begin{pmatrix} -d & -b \\ -c & -a \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$
$$M_7 = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}, \quad M_8 = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$
(Ohne Begründung)

4. Sei $A \in \mathrm{Mat}(10,\mathbb{R})$ und
$$P_A(t) = t^3(t^2+1)^2(t-1)^3$$
das charakteristische Polynom von A. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen stets wahr (**W**) oder (für manche A) falsch (**F**) sind. (Jede korrekte Antwort zählt positiv, jede falsche Antwort negativ, keine Antwort ist neutral.)

W	**F**	
□	□	$\dim V_0 \leq 3$
□	□	$\dim V_0 = 3$
□	□	1 ist ein Eigenwert von A.
□	□	-1 ist ein Eigenwert von A.
□	□	A ist diagonalisierbar.

5. Geben Sie eine Basis des Vektorraums der schiefsymmetrischen Bilinearformen
$$\rho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \rho(x,y)$$
an. Notieren Sie dabei die Bilinearformen auf $\mathbb{R}^3$ als Polynom $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_iy_j$ mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

(Ohne Begründung)

6. Betrachten Sie den Hilbertraum $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{C})$ mit der kanonischen Hilbertbasis $(e_k)_k$. Sei $(f_n)_n$ eine Folge von Elementen des Hilbertraums. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (**W**) oder falsch (**F**) sind. (Jede korrekte Antwort zählt positiv, jede falsche Antwort negativ, keine Antwort ist neutral.)

W	**F**	
☐	☐	Die Folge $(f_n)_n$ ist beschränkt, wenn $f_n = e_n$ ist.
☐	☐	Die Folge $(f_n)_n$ ist konvergent, wenn $f_n = e_n$ ist.
☐	☐	Die Folge $(f_n)_n$ ist konvergent, wenn $f_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e_k$ ist.
☐	☐	Die Folge $(f_n)_n$ konvergiert gegen 0, wenn $f_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e_k$ ist.
☐	☐	Die Folge $(f_n)_n$ ist beschränkt, wenn $f_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} e_k$ ist.

7. Es sei $\|\,.\,\|_2$ die Norm auf $\mathbb{R}^3$, die definiert ist durch

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie die Operatornorm der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

bezüglich $\|\,.\,\|_2$. Begründen Sie Ihr Resultat.

8. Bestimmen Sie alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, an denen

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \exp(\cos(x)) \sin(y) + z^2$$

ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum annimmt. Begründen Sie Ihr Resultat.

9. Es seien $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ und $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbare Abbildungen. Drücken Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i} F(x_1, x_2, G(x_1, x_2))$ mit Hilfe der partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i} F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ und $\frac{\partial}{\partial x_i} G(x_1, x_2)$ und mit Hilfe der Funktionen $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ und $G(x_1, x_2)$ als Funktion in x_1, x_2 aus.

10. Sei

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Abbildung.

Geben Sie eine hinreichende Bedingung an, so dass für alle $(p,q,r) \in f^{-1}(0,0)$ offene Umgebungen $V \subset \mathbb{R}$ von p und $W \subset \mathbb{R}^2$ von (q,r) existieren und es eine stetig differenzierbare Abbildung $g : V \to W$ gibt, so dass für alle $(x,y,z) \in V \times W$ gilt:

$$f(x,y,z) = 0 \Longleftrightarrow (y,z) = g(x)$$

11. Sei $I = (a,b)$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Betrachten Sie eine Differentialgleichung von der Form

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t),$$

bei der $p, q : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind und q nicht die Nullfunktion ist. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen stets wahr (**W**) oder (in manchen Fällen) falsch (**F**) sind. (Jede korrekte Antwort zählt positiv, jede falsche Antwort negativ, keine Antwort ist neutral.)

W **F**

□ □ Zu jeder Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ für $t_0 \in I$ existiert genau eine Lösung $x : I \to \mathbb{R}$.

□ □ Die Summe von zwei Lösungen $x_1, x_2 : I \to \mathbb{R}$ ist wieder eine Lösung der Differentialgleichung.

□ □ Die Menge aller Lösungen $x : I \to \mathbb{R}$ bildet einen affinen Raum.

12. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem durch Trennung der Variablen:

$$x' = tx^2 + t, \quad x(0) = 1$$