Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Jan Christian Rohde

**Übungsaufgaben 47-51 zur Abgabe zu Beginn der Vorlesung am 28.01.2011.**
Sie können die Lösungen in Zweiergruppen erstellen. Alle Personen müssen dann aber der gleichen Übungsgruppe angehören.

**Aufgabe 47:**(*6 Punkte*)
Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung gegeben durch

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie eine Basis des Bilds und eine Basis des Kerns von $f$.

**Aufgabe 48:**(*6 Punkte*)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit den Untervektorraäumen $U$ und $W$. Außerdem nehmen wir an, dass

$$v_1, \dots, v_r \in U \cap W, \quad u_1, \dots, u_s \in U \quad \text{und} \quad w_1, \dots, w_t \in W,$$

so dass

**i)** $v_1, \dots, v_r$ eine Basis von $U \cap W$,

**ii)** $v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s$ eine Basis von $U$,

**iii)** $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_t$ eine Basis von $W$ ist.

Beweisen Sie, dass $v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_t$ eine Basis von $U + W$ ist.

**Aufgabe 49:**(*8 Punkte*)
Sei $a \in \mathbb{R}$,

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^3.$$

Berechnen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A_a \cdot x = b$ in Abhängigkeit von $a$.

bitte wenden



Dpt. Mathematik, AD · Geom. 219 · jan.christian.rohde@math.uni-hamburg.de · www.math.uni-hamburg.de/home/j.c.rohde

**Aufgabe 50:**(*2+3+5 Punkte*)
Welche der folgenden Untermengen von Gruppen sind Untergruppen? (Beweis oder Gegenbeispiel)

**a)**

$$U_1 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z} : n = 3m\} \subset (\mathbb{Z}, +)$$

**b)**

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \subset (\mathrm{GL}(3, \mathbb{R}), \cdot)$$

**c)**

$$U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \;\middle|\; |a|^2 + |b|^2 = 1,\ a, b \in \mathbb{C} \right\} \subset (\mathrm{GL}(2, \mathbb{C}), \cdot)$$

**Aufgabe 51:**(*3+3+4 Punkte*)
Welche der folgenden Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen? (Beweis oder Gegenbeispiel)

**a)**

$$f_1 : (\mathbb{R}, +) \to (\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}, \cdot), \quad f_1(x) = \exp(x)$$

**b)**

$$f_2 : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Q}, +), \quad f_2(z) = z^2$$

**c)**

$$f_3 : (\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}), \cdot), \quad f_3(x + iy) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$