Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Jan Christian Rohde

Übungsaufgaben 9-12 zur Abgabe zu Beginn der Vorlesung am 19.11.2010
Sie können die Lösungen in Zweiergruppen erstellen. Alle Personen müssen dann aber der gleichen Übungsgruppe angehören.

Aufgabe 9:(*4+6 Punkte*)
Beweisen Sie:
a) Die Folge $\left(\frac{(-2)^n}{2^n+1}\right)$ ist nicht konvergent.
b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+5}\right)^n = 0$$

Hinweis: Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$0 < \left(\frac{2n+1}{3n+5}\right)^n < \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Aufgabe 10:(*10 Punkte*)
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl k und jede reelle Zahl b mit $|b| > 1$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{b^n} = 0$$

Hinweis: Man hat

$$\frac{(n+1)^k}{b^{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^k}{b}\frac{n^k}{b^n}.$$

Was gilt dann für das Verhältnis von $|\frac{(n+1)^k}{b^{n+1}}|$ und $|\frac{n^k}{b^n}|$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$? Wie kann man damit den Betrag der Folgenglieder abschätzen?

Aufgabe 11:(*10 Punkte*)
Sei (x_n) eine Folge, die gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann die Folge (y_n) gegeben durch

$$y_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i$$

ebenfalls gegen x konvergiert.
Hinweis: Sie können benutzen, dass für den Betrag beliebiger endlicher Summen reeller Zahlen gilt:

$$\left|\sum_{i=0}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i|$$

(bitte wenden)

Aufgabe 12:(*2+2+3+3 Punkte*)
Beweisen Sie, dass die folgenden Reihen konvergent sind:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n},$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!},$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n!}},$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + 1}{x^{2n}} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}, |x| > 1$