Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Jan Christian Rohde

Übungsaufgaben 1-4 zur Abgabe zu Beginn der Vorlesung am 05.11.2010.
Sie können die Lösungen in Zweiergruppen erstellen. Alle Personen müssen dann aber der gleichen Übungsgruppe angehören.

Aufgabe 1:(*4+6 Punkte*)
a) Bestimmen Sie alle Teilmengen von $\{1,2,3\}$.

b) Seien A und B Teilmengen von $\mathbb{R}$. Schreiben Sie die folgende Aussage mit Hilfe von Quantoren, und geben Sie die Verneinung der Aussage an (in Quantorenschreibweise und mit Worten).

"Für jedes Element x aus A existiert ein Element y aus B, so dass die Summe von x und y ein Element aus den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist."

Aufgabe 2:(*4+6 Punkte*)
Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k = (n+1)! - 1.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Aufgabe 3:(*4+3+3 Punkte*)
Seien A, B, C Mengen und seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen.
a) Zeigen Sie:

$$f, g \text{ surjektiv } \Rightarrow g \circ f \text{ surjektiv}$$

b) Zeigen Sie:

$$g \circ f \text{ surjektiv } \Rightarrow g \text{ surjektiv}$$

c) Finden Sie ein Beispiel, so dass $g \circ f$ surjektiv ist, aber nicht f.

Aufgabe 4:(*10 Punkte*)
Ein Mann steigt eine Treppe mit $n \geq 1$ Stufen hinauf und nimmt bei jedem Schritt eine oder zwei Stufen. Zeigen Sie, dass die Anzahl der möglichen Abfolgen von 1-er oder 2-er Schritten durch die Fibonacci Zahl x_{n+1} gegeben ist.
Hinweis: Sie können an Stelle des üblichen Induktionsschritts $n \to n+1$ hier den Induktionsschritt $n, n+1 \to n+2$ verwenden. Wie muss man dann den Induktionsanfang und die Induktionsvoraussetzung verändern?

Dpt. Mathematik, AD · Geom. 219 · jan.christian.rohde@math.uni-hamburg.de · www.math.uni-hamburg.de/home/j.c.rohde