Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Jan Christian Rohde

Klausur

Mathematik für Physiker I
WS 2010/11

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Nachname: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnr: ____________________

Es dürfen alle schriftlichen Unterlagen inklusive Büchern, Notizen, Übungsaufgaben und Lösungen verwendet werden. Untersagt ist jedoch die Benutzung eines Taschenrechners und anderer elektronischer Geräte. Jede zusätzliche beschriebene Seite muss mit Namen und Matrikelnummer beschriftet werden.

---

von den Korrektoren auszufüllen:

____

Note nach Klausurpunkten

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12

$\sum$:

1. Skizzieren Sie die Menge
$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}((2+i)z) \leq 1\}$$
in der komplexen Zahlenebene.

2. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 7$ gilt:
$$n^7 \leq 7^n$$

3. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (**W**) oder falsch (**F**) sind. (Jede korrekte Antwort zählt positiv, jede falsche Antwort negativ, keine Antwort is neutral.)

W	**F**	
$\square$	$\boxtimes$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^5+2n^4+n^2}{n^7-1} = 1$
$\boxtimes$	$\square$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n}$ konvergiert nicht.
$\square$	$\boxtimes$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ konvergiert.
$\square$	$\square$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ konvergiert.

4. Seien $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ Folgen in $\mathbb{C}$ und $x, y \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ und $|y| < 5$. Ferner sei $N \in \mathbb{N}$ mit
$$|x_n - x| < \frac{1}{10}, \quad |y_n - y| < \frac{1}{5} \quad (\forall n \geq N).$$
Beweisen Sie:
$$|x_n y_n - xy| < 1 \quad (\forall n \geq N).$$

5. Die Funktion $f : [-6, 9) \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = 2 + |1 - x^2|$ definiert. Geben Sie alle Stellen an, in denen f ein lokales Minimum annimmt.

6. Beweisen Sie nur mit Hilfe der (Folgen-) Definition der Stetigkeit, dass
$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \bar{z}$$
stetig ist. (Sie dürfen die in der Vorlesung etablierten Eigenschaften für konvergente Folgen benutzen.)

7. Berechnen Sie die Ableitung f' von
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\exp(-ax^2)}{1+bx^2}.$$

8. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Beweisen Sie mit Hilfe der Monotonie des Integrals, dass

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

für jede integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

9. Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (x^2 + x)\ln(x)$$

mit Hilfe von partieller Integration.

10. Sei $A \in M(3 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und sei $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Eine Zeilenstufenform der Matrix $(A|b)$ ist

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie kurz!

a) Die Lösungsmenge $Ax = 0$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ der Dimension 1.

b) $Ax = b$ hat genau eine Lösung.

c) Es existiert ein $c \in \mathbb{R}^3$, so dass $Ax = c$ keine Lösung hat.

11. Sei V ein 8-dimensionaler Vektorraum. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr (**W**) oder falsch (**F**) sind. (Bewertung wie in Aufgabe 3.)

W	**F**	
□	□	9 Vektoren sind stets linear abhängig.
□	□	9 Vektoren erzeugen stets ganz V.
□	□	Wenn 6 beliebige Vektoren gegeben sind, kann man immer 2 weitere finden, so dass sie susammen eine Basis bilden.
□	□	Jedes linear unabhängige System aus 8 Vektoren bildet eine Basis.
□	□	Jede Basis eines Untervektorraums $U \subset V$ lässt sich zu einer Basis von V ergänzen.
□	□	Wenn ein Unterraum $U \subset V$ und eine Basis (v_i) von V gegeben sind, dann kann man eine Basis von U finden, indem man geeignete Vektoren v_i auswählt.

☐ ☐ Ein von 5 Vektoren aufgespannter Unterraum von V hat immer Dimension kleiner oder gleich 5.

☐ ☐ Ein von 5 Vektoren aufgespannter Unterraum von V hat immer Dimension größer oder gleich 5.

12. Bestimmen Sie σ^{1001} für
$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \in S^5.$$