# Partialbruchzerlegung

Maike Tormählen

9. Januar 2011

## 1 Ziel

Die Partialbruchzerlegung ist ein Verfahren, das die Integration komplizierter Polynome ermöglicht. Gegeben sei ein echter, teilerfremder Bruch, in dessen Zähler und Nenner je ein Polynom stehen:

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ...b_m}{x^n + a_1x^{n-1} + ...a_n}$$

Dieser Bruch soll so umgeformt werden, dass er integriert werden kann. Dazu wird sein Nenner linearisiert, d.h. der Bruch wird in Summanden der Form

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k} \text{ und } \frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^l}$$

aufgeteilt. Nach vollständiger Zerlegung kommt $x$ in jedem Summanden nur in erster Potenz innerhalb der Klammer vor. Dadurch wird eine Integration des Ausdrucks mithilfe von $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + c$ oder Verkettungen mit $\ln x$ möglich.

Vor der Zerlegung muss geprüft werden, ob der Grad von $P$ größer als der Grad von $Q$ ist. Sollte das nicht der Fall sein, muss man den Bruch entsprechend umformen, z.B. mit Polynomdivision. Um die Partialbruchzerlegung durchzuführen, werden die Nullstellen von $P(x)$ ermittelt und das Polynom faktorisiert. Dann wird der Bruch in Summanden zerlegt, sodass der Nenner jedes Summanden einen Faktor von $P(x)$ enthält. Die Form des zerlegten Ausdrucks hängt von der Art der Nullstellen ab.

## 2 Fallunterscheidung

1. Die Menge $\{x \in \mathbb{R} | P(x) = 0\}$ besteht aus $n$ einfachen Nullstellen $\alpha_i$. Dann hat die Zerlegung folgende Form:

   $$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A}{x-\alpha_1} + \frac{B}{x-\alpha_2} + ...\frac{C}{x-\alpha_n}$$

   Die Koeffizienten $A, B, C$ werden durch Koeffizientenvergleich bestimmt (auch als „Methode der unbestimmten Koeffizienten“ bezeichnet, siehe Beispiel aus dem Tutorium am 3. Januar 2011)

2. $\{x \in \mathbb{R} | P(x) = 0\}$ ist reell, beinhaltet aber mehrfache Nullstellen.

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i}{(x-\alpha_1)^i} + \sum_{j=1}^{q} \frac{B_j}{(x-\alpha_2)^j} + ... \sum_{k=1}^{r} \frac{C_k}{(x-\alpha_n)^k}$$

   $A_i$, $B_j$ und $C_k$ sind wieder konstante Koeffizienten. $p, q$ und $r$ sind die Multiplizitäten der mehrfachen Nullstellen. Insgesamt ergeben sich $n$ Summanden. $n$ ist der Grad von $P$. Die Bestimmung der Konstanten erfolgt durch Koeffizientenvergleich.

3. $\{x \in \mathbb{R} | P(x) = 0\}$ ist komplex oder reell. Die komplexen Nullstellen sind einfach. Die reellen Nullstellen werden wie in Fall 2 behandelt.

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \underbrace{\sum_n \sum_i \frac{A_i}{(x-\alpha_n)^i}}_{\text{n i-fache reelle Nullstellen}} + \underbrace{\frac{Dx+E}{x^2+p_1x+q_1} + ...}_{\text{einfache komplexe Nullstellen}}$$

   Der Nenner wird bei den komplexen Nullstellen in der quadratischen Form belassen. Damit umgeht man das Problem, komplexe Gleichungen auszuwerten. Die Koeffizienten werden mit Koeffizientenvergleich bestimmt.

4. $\{x \in \mathbb{R} | P(x) = 0\}$ beinhaltet auch komplexe, mehrfache Nullstellen. Die Zerlegung erfolgt nach dem gleichen Prinzip wie bei den reellen Nullstellen:

$$\sum_i \frac{D_i x + E_i}{(x^2 + p_i x + q_i)^i}$$

   Lösung wieder mit Koeffizientenvergleich.

*Quelle: Bronstein-Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, 1967*