Stochastik für Studierende der Informatik

Hausaufgabenblatt 7 + 8 Lösungen

Aufgabe H 7.2: $(X_1,\ldots,X_n)$: Ziehungsprotokoll bei n-maligem Ziehen ohne Zurücklegen aus N Objekten, K markiert. Y: Zahl der gezogenen markierten Objekte.

(a) Z.Z.: $\mathrm{Kov}(X_i,X_j) = -\mathrm{Var}X_1/(N-1)$, und $\mathrm{Var}Y = n\,\frac{K}{N}\,\frac{N-K}{N}\,\frac{N-n}{N-1}$.

(b) Berechnen Sie $E(a+bY+cY^2)$ ohne Auswertung einer Summe vom Typ $\sum_0^n k^m f^Y(k)$.

Lösung: X_1 hat $B(K/N)$-Verteilung. Nach Vorl./Hinw./Folg. 5.13 gilt $P^{X_1} = P^{X_2} = \ldots = P^{X_n}$.

$Y = X_1+\ldots+X_N$ hat nach Vorl./Def. 5.5 eine Hypergeom. Verteilung: $\mathrm{H}(N,K,n)$.

(a1) z.z.: $\mathrm{Kov}(X_i,X_j)$ (= $\mathrm{Kov}(X_1,X_2)$ n. Hinweis) $= -\mathrm{Var}X_1/(N-1) =$

$= -\frac{K}{N}\left(1-\frac{K}{N}\right)\cdot\frac{1}{N-1}$. Dazu $X_1 \sim B(p)$, $p=\frac{K}{N}$, $\mathrm{Var}X_1 = p\,(1-p)$

und im Folgenden $EX_1 = p$ und $E(X_1X_2) = P(X_1=1, X_2=1)$.

Dann ist $\mathrm{Kov}(X_1,X_2) = E(X_1X_2) - EX_1\cdot EX_2 = \frac{K}{N}\,\frac{K-1}{N-1} - \frac{K}{N}\,\frac{K}{N} =$

$$= \frac{K}{N}\,\frac{(K-1)N-K(N-1)}{(N-1)N} = \frac{K}{N}\,\frac{K-N}{N(N-1)} = -\frac{K}{N}\,\frac{N-K}{N}\,\frac{1}{N-1}.$$

(a2) $\mathrm{Var}Y = \mathrm{Var}(X_1+\ldots+X_n) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}X_i + \sum_{i=1}^n\sum_{j\neq i}\mathrm{Kov}(X_iX_j) =$

$$= n\,\frac{K}{N}\,\frac{N-K}{N} + n(n-1)(-1)\frac{K}{N}\,\frac{N-K}{N}\,\frac{1}{N-1} = n\,\frac{K}{N}\,\frac{N-K}{N}\left[1-(n-1)\,\frac{1}{N-1}\right]$$

$$= \ldots\left[\frac{N-1-n+1}{N-1}\right] = n\,\frac{K}{N}\,\frac{N-K}{N}\,\frac{N-n}{N-1}.$$

(b) $E(a+bY+cY^2) = a+bEY+cEY^2$, wenn EY, EY^2 ex. und endlich.

$EY = n\,\frac{K}{N}$ (= $n\,p$) nach Vorlesung bzw. wg. $Y = \sum_1^n X_i$, $EY = \sum_1^n EX_i = n\,p$.

$EY^2 = \mathrm{Var}Y + (EY)^2$ (folgt aus $\mathrm{Var}Y = (EY)^2-(EY)^2) = n\,\frac{K}{N}\,\frac{N-K}{N}\,\frac{N-n}{N-1} + n^2(\frac{K}{N})^2$.

$\Rightarrow E(a+bY+cY^2) = a+bEY+c\,(\mathrm{Var}Y + (EY)^2) = \ldots$ (einsetzen!).

Aufgabe H 8.2: $(X_0,X_1,\ldots)$: HMK mit $I=\{1,2,3\}$, Ü-Matrix $(p_{ij}) = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 \\ d & ? & b \\ 0 & c & 1-c \end{pmatrix}$.

Lösung:(a) Übergangs-Graph: $\ldots$, $p_{22} = 1-b-d$.

(b1) GGV ((π_i)) mit Gleichungssystems (G), (N):

(G$_1$): $\pi_1 = (1-a)\pi_1 + d\,\pi_2 + 0$, (G$_2$): $\pi_2 = a\,\pi_1 + (1-b-d)\pi_2 + c\,\pi_3$,

(G$_3$): $\pi_3 = 0 + b\,\pi_2 + (1-c)\,\pi_3$, (N): $\pi_i \geq 0$, $\pi_1+\pi_2+\pi_3 = 1$,

aus (G$_1$): $\pi_2 = \frac{a}{d}\pi_1$, aus (G$_3$): $\pi_3 = \frac{b}{c}\pi_2 = \frac{ab}{dc}\pi_1$,

aus (G$_2$): $\pi_3 = \frac{1}{c}((b+d)\pi_2 - a\pi_1) = \frac{b}{c}\frac{a}{d}\pi_1 + \frac{a}{c}\pi_1 - \frac{a}{c}\pi_1$ (redundant).

aus (N): $1 = \pi_1+\pi_2+\pi_3 = \pi_1(1+\frac{a}{d}+\frac{ab}{cd}) \Rightarrow \pi_1 = \frac{cd}{cd+ca+ab}$, $\pi_2 = \frac{ca}{cd+ca+ab}$, $\pi_3 = \frac{ab}{cd+ca+ab}$,

(b2) GGV mit Gleichungssystem (L), (N): ((L) anwendbar?)

(L) ist anwendbar, da die Schnitte $1|2$ bzw. $2|3$ den Ü-Graph zerlegen.

L$_{1,2}$: $\pi_1 a = \pi_2 d \Rightarrow \pi_2 = \frac{a}{d}\pi_1$, L$_{2,3}$: $\pi_2 b = \pi_3 c \Rightarrow \pi_3 = \frac{b}{c}\pi_2 = \frac{ab}{dc}\pi_1$.

(c) Rechenaufwand? Bei (b2) deutlich geringer!