A. Blunck, G. Hübner, E. Kremer, C. Malchin, G. Neuhaus
Universität Hamburg, FB Mathematik

Stochastik (und Optim.) für Studierende der (Wirtschafts-)Informatik

Hausaufgabenblatt H 3 Lösungen

H 3.1: (Zustand eines Bauteils)

(a) Bezeichnungen: entweder: $A :=$ „Bauteil ist defekt“, $B :=$ „Messung zeigt ‘defekt’“
oder mit ZV: $Z :=$ „Zustand“, $M :=$ „Messung“, jeweils: $0 =$ defekt, $1 =$ intakt.
Dann ist $A = \{Z{=}0\}$, $A^c = \{Z{=}1\}$, $B = \{M{=}0\}$, $B^c = \{M{=}1\}$.

Angaben: „Wenn ein Defekt …“: $P(B|A) = P(M{=}0|Z{=}0) = 0.9$,
„Wenn kein Defekt …“: $P(B|A^c) = P(M{=}0|Z{=}1) = 0.05$,
„Die W. eines Defekts “: $P(A) = P(Z{=}0) = 0.01$.

Fragen: Bei (b) $P(A|B) = P(Z{=}0|M{=}0) = ?$, bei (c) $P(A|B^c) = P(Z{=}0|M{=}1) = ?$

(b) $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)} = \dfrac{(.01)(.9)}{(.01)(.9)+(.99)(.05)} = \dfrac{2}{13} = 0.154.$

(c) $P(A|B^c) = \dfrac{P(AB^c)}{P(B^c)} = \dfrac{P(A)P(B^c|A)}{P(A)P(B^c|A)+P(A^c)P(B^c|A^c)} = \dfrac{(.01)(.1)}{(.01)(.1)+(.99)(.95)} \approx 0.001.$

(d) Beobachtung: Die Anzeige ‘defekt’ ist extrem unzuverlässig (15%),
die Anzeige ‘intakt’ ist extrem zuverlässig (99.9%).
[Ursache: Die Anzeige ‘defekt’ kommt zu 85% von intakten Bauteilen, s. (b).]

H 3.2: (a) Modell: $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, Z-Dichte $f(k) = a\cdot(0.7)^k$, $k \in \Omega$ (Wertebereich!).

(a1) $N = 10$: Für die Konstante a muss gelten: ($f(k) \ge 0$ und) $\sum_{k\in\Omega} f(k) = 1$, also

$$a\cdot\sum_{k=0}^{N}(0.7)^k = a\,\frac{1-(0.7)^{N+1}}{1-0.7} \quad\Rightarrow\quad \underline{a} = \frac{0.3}{1-(0.7)^{11}} \underline{\approx 0.306}.$$

$\underline{P(Z \ge 3)} = 1 - P(\{0,1,2\} = 1 - a\,(1 + 0.7 + 0.49) \underline{\approx 0.330}$

(a2) $N = 80$: (Spätestens hier sollte die Summenformel aus (a1) benutzt werden!)
$\underline{a} = \dfrac{1-0.7}{1-(0.7)^{81}} \underline{\approx 0.300}$, $\underline{P(Z \ge 3)} = 1 - P(\{0,1,2\}) = 1 - a\cdot 2.19 \underline{\approx 0.343}$.
$N = \infty$: $\underline{a} = 1 - 0.7 \underline{= 0.300}$, $\underline{P(Z \ge 3)} = \underline{0.343}$ wie bei $N = 80$, diesmal exakt.

(b) Empirische Verteilung mit Z-Dichte $\hat{f}_n^{\mathbf{x}}(x) := \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\sum_{i=1}^n 1_{\{x\}}(x_i) \overset{\text{oder}}{=} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\sum_{i=1}^n 1_{\{x_i\}}(x)$, $x\in\Omega$.

Tabelle:

$x =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\hat{f}_n^{\mathbf{x}}(x) =$	.05	0	.1	.1	.15	.1	.15	.1	.1	.05	.1 .

H 3.3: (a) A, B stoch. unabhängig $\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} P(AB) = P(A)P(B)$, z.z. $P(AB^c) = P(A)P(B^c)$.
Dazu: $P(AB^c) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$.

(b) Sei A, B st.u. $\overset{\text{symm.}}{\Rightarrow}$ B, A st.u. $\overset{\text{(a)}}{\Rightarrow}$ B, A^c st.u., ebenso A^c, B st.u. $\Rightarrow$ A^c, B^c st.u..

(c) A, B, C st.u. $\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow}$ A, B st.u., A, C st.u., B, C st.u. und $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.
A, B, C^c st.u. $\Leftrightarrow$ A, B st.u., A, C^c st.u., B, C^c st.u.($\surd$) und $P(ABC^c) \overset{\text{s. (a)}}{=} P(AB) - P(ABC) =$
$\ldots = P(A)P(B) - P(A)P(B)P(C) = P(A)P(B)P(C^c)$ ($\surd$). Der Rest wie (b): Vertauschen!