A. Brunck, G. Hübner, L. Kremer, C. Malchin, G. Neuhaus
Universität Hamburg, FB Mathematik

Stochastik (und Optim.) für Studierende der (Wirtschafts-)Informatik

Hausaufgabenblatt 7

Ausgabe am Dienstag, 20.05.03
Abgabe am Dienstag, 27.05.03

Es wird auch diesmal nur die erste Aufgabe korrigiert und bewertet.
Die zweite Aufgabe ist – wie bisher – trotzdem zu lösen.

Aufgabe H 7.1: (K)

In einem Produktionsprozess seien gewisse Störungen Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 vorhanden, die unabhängig voneinander $\mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2)$-verteilt seien mit Mittelwerten $a_i = 1{,}0/1{,}0/2{,}0/3{,}0$ und Streuungen $\sigma_i = 2{,}0/1{,}0/3{,}0/2{,}0$. Außerdem gebe es Folgefehler Z_1, Z_2, Z_3, die linear von den Störungen X_i abhängen. Es gelte

$$\begin{aligned}
Z_1 &= 10 + 3Y_1 \phantom{{}- 2Y_2} + Y_3 + 2Y_4 \\
Z_2 &= 20 \phantom{{}+ 3Y_1} - 2Y_2 + 5Y_3 + 3Y_4 \\
Z_3 &= 5 \phantom{{}+ 3Y_1} + 4Y_2 \phantom{{}+ 5Y_3} - Y_4
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie (a) die gemeinsame Verteilung von $(Y_1, \ldots, Y_4)$,
(b) die gemeinsame Verteilung von (Z_1, Z_2, Z_3),
(c) die Verteilungen von Z_2 und $\mathrm{Kov}(Z_1, Z_3)$,
(d) die gemeinsame Verteilung von Z_2 und Z_3.

Aufgabe H 7.2:

Es sei $(X_1, \ldots, X_n)$ das Ziehungsprotokoll bei n-maligem Ziehen ohne Zurücklegen aus N Objekten, darunter K markierte ('markiert' = 1).
Y sei die Zahl der gezogenen markierten Objekte.

(a) Zeigen Sie: $\mathrm{Kov}(X_i, X_j) = -\mathrm{Var} X_1/(N-1)$, und beweisen Sie damit

$$\mathrm{Var} Y = n\,\frac{K}{N}\,\frac{N-K}{N}\,\frac{N-n}{N-1}\,.$$

Hinweis: Es ist $P^{(X_i)} = P^{(X_1)}$ und $P^{(X_i, X_j)} = P^{(X_1, X_2)}$, $1 \le i, j \le n$.

(b) Berechnen Sie $E(a + bY + cY^2)$ ohne Auswertung einer Summe vom Typ $\sum_0^n k^m f^Y(k)$.