Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Dpt. Mathematik, Schwerpunkt Stochastik



# Übungen zur Mathematischen Stochastik

**Präsenzaufgabenblatt 7** Bearbeitung am Mittwoch, 6. 12. 06

## Aufgabe P 7.1:

Skizzieren die Übergangs-Graphen zu folgenden Übergangsmatrizen für die Zustandsmenge $I = \{1, 2\}$:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}0 & 1{,}0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie für die zugehörigen Markov Ketten $(X_n)$ die Werte
$a_n := P(X_n = 1)$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ mit $a_0 = 1/0{,}5/0$
und beobachten Sie das langfristige Verhalten.

## Aufgabe P 7.2:

Zeigen Sie, dass in jedem W-Modell $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ jede Indikatorfunktion $1_A$ eine Zufallsvariable ist, falls $A$ aus $\mathcal{A}$ ist.

## Aufgabe P 7.3:

$(\Omega, \mathcal{A})$ sei ein Messraum, $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in I := \{1, \ldots, n\}$
und $Y : \Omega \to I$ seien messbare Abbildungen.
Zeigen Sie, dass dann auch die folgende Abbildung $S$ messbar ist:

$$S : \Omega \to \mathbb{R}, \;\; \omega \mapsto S(\omega) := \textstyle\sum_{k=1}^{Y(\omega)} X_k(\omega).$$

## Aufgabe P 7.4:

Ein (echter) Würfel wird zweimal geworfen.

Bestimmen Sie die Verteilung der Augensumme, indem Sie zuerst ein Modell für das zweimalige Würfeln formulieren und dann die Augensumme als Zufallsvariable $S : \Omega \to \Omega'$ darstellen.

Skizzieren Sie die Z-Dichte und die Verteilungsfunktion.

## Aufgabe P 7.5: (Reserve)

Über $\overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (den erweitert reellen Zahlen) definiert man das System der Borelmengen durch $\overline{\mathbb{B}} := \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{R}}}(\overline{\mathcal{G}}_1)$ mit $\overline{\mathcal{G}}_1 := \mathcal{G}_1 \cup \{\infty\}$.
Zeigen Sie (a) $\{\infty\}, \mathbb{R}, \{-\infty\} \in \overline{\mathbb{B}}$, (b) $\mathbb{B} \subset \overline{\mathbb{B}}$,
(c) $\widetilde{\mathbb{B}} := \cup_{B \in \mathbb{B}} \{B, B \cup \{\infty\}, B \cup \{-\infty\}, B \cup \{-\infty, \infty\}\} = \overline{\mathbb{B}}$.
Hinweis zu (b): Good Sets Principle, zu (c): $\widetilde{\mathbb{B}}$ ist $\sigma$-Algebra über $\overline{\mathbb{R}}$.