Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Dpt. Mathematik, Schwerpunkt Stochastik

Übungen zur Mathematischen Stochastik

Präsenzaufgabenblatt 13 — Bearbeitung am 31. 1. 2007

Aufgabe P 13.1:

Die gemeinsame Verteilung der ZV $\mathbf{W} = (W_1, W_2, W_3, W_4)^T$

sei die Normalverteilung $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{K})$ mit $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 0 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

(a) Welche Verteilungen haben die ZV W_1, W_4 und $\widetilde{\mathbf{W}} = (W_2, W_3)^T$?

(b) Für welche Paare (i, j) sind die ZV W_i, W_j stochastisch unabhängig? Warum?

Aufgabe P 13.2:

Die Einkaufspreise R_1, R_2, R_3 von Bauteilen seien stoch. unabhängig und normalverteilt mit Mittelwerten 10, 15, 20 und Streuungen 2, 3, 1.
Für die Preise S_1, S_2 der Endprodukte gelte

$$\begin{aligned} S_1 &= 20 + 5\,R_1 + 2R_3 \\ S_2 &= 30 + 4\,R_2 + 3R_3 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die gemeinsamen Verteilungen von (R_1, R_2, R_3) und von (S_1, S_2).

Aufgabe P 13.3:

Die ZV $X_1, \ldots, X_n$ seien stoch. unabhängig und $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt.
Es sei $X := (X_1, \ldots, X_n)^T$.
Die ZV $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)^T$ sei bestimmt durch $Y = \mathbf{A}\,X$
mit einer $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$, deren Elemente gegeben sind durch

$a_{1j} := 1/\sqrt{n},\ j = 1, \ldots, n$ (1. Zeile) und für $i = 2, \ldots, n$

$a_{ij} := 1/\sqrt{i(i-1)},\ j = 1, \ldots, i-1;\ a_{ii} := -(i-1)/\sqrt{i(i-1)}$, sonst $a_{ij} = 0$.

Schreiben Sie die Matrix für $n = 5$ auf.

Zeigen Sie: (a) Y ist standard-normalverteilt.

(b1) $Y_1 = (1/\sqrt{n}) \sum_{i=1}^n X_i$, (b2) Y_1 ist $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt.

(c) $\sum_{i=1}^n Y_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$ (mit $X^T X = ?$).

(d) $Z := \sum_{i=\mathbf{2}}^n Y_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n X_i)^2$ (mit (c)).

(e) Z ist χ^2_{n-1}-verteilt und stoch. unabhängig von Y_1.