Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Dpt. Mathematik, Schwerpunkt Stochastik

Übungen zur Mathematischen Stochastik

Hausaufgabenblatt 6

Ausgabe am Freitag, 1. 12. 06
Abgabe am Freitag, 8. 12. 06, 14:20 Uhr

Nur zwei Aufgaben wg. **Test 1 am 8. 12., 14:20 Uhr** (Aufg. bis H 5)

Aufgabe H 6.1:

Der Zustand eines technischen Systems werde (täglich) beschrieben durch zwei Bewertungen, z.B. anfällig/stabil oder mäßig (= 0)/gut (= 1).
Nach den bisherigen Erfahrungen folgt auf den Zustand „mäßig" mit Wahrscheinlichkeit $a = 0.3$ der Zustand „gut", auf „gut" folgt „mäßig" mit Wahrscheinlichkeit $b = 0.2$. Das System starte zum Zeitpunkt 1 mit Wahrscheinlichkeit $c_1 = 0.8$ im Zustand $X_1 =$ „gut".

(a) Beschreiben Sie die Zustände X_i durch ein homogenes Markov-Modell.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit c_n, zum Zeitpunkt $n = 2, 3, 4, \ldots$ im Zustand „gut" zu sein? Was ergibt sich für $n \to \infty$?

(c) Für welches c_1 ist $c_2 = c_1$? Wie groß ist dann $P(X_n = 1)$?

Geben Sie die Ergebnisse in Zahlen *und* in Formeln an.

Aufgabe H 6.2:

Es sei $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$, wobei $A_0 := [0, 1]$, $A_1 := [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ und entsprechend A_{n+1} dadurch entsteht, dass aus allen Komponenten von A_n das mittlere offene Drittel entfernt wird.

Außerdem sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = 0$ für $x \leq 0$, $F(x) = 1$ für $x \geq 1$, $F(x) = 1/2$ für $1/3 < x < 2/3$, $F(x) = 1/4$ für $1/9 < x < 2/9$, $F(x) = 3/4$ für $7/9 < x < 8/9$, usw., und sonst $F(x) := \inf\{F(t), t \in (x, 1] \setminus C\}$.

(a) Skizzieren Sie F und zeigen Sie $\lambda(A_n) = (2/3)^n$ und $\lambda(C) = 0$.

(b) Machen Sie plausibel (in Worten, nicht formal), dass F isoton und stetig ist. Warum ist F normiert?

(c) Zeigen Sie für das zu F gehörige W-Maß P_F, dass $P_F(A_n^c) = 0$ gilt, und deshalb $P_F(C) = 1$.