Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Dpt. Mathematik, Schwerpunkt Stochastik

Übungen zur Mathematischen Stochastik

Hausaufgabenblatt 3

Ausgabe am Freitag, 10.11.06
Abgabe am Freitag, 17.11.02, 14:20 Uhr

Aufgabe H 3.1:

(a) Die Zahl Z der Wartenden an einem Fahrkartenschalter werde modelliert durch $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ und die Z-Dichte $f(k) = a \cdot (0.7)^k$.
Bestimmen Sie die Konstante a und $P(Z \geq 5)$

(b) Eine Firma will Rechenzeit bei einem Rechenzentrum kaufen.
Der (zufällige) wöchentliche Bedarf (in Stunden) besitze eine R-Dichte

$$f(x) = c\,(x-2)(5-x)^2,\ \ 2 < x < 5,\ \ \text{sonst} = 0.$$

Berechnen Sie die Konstante c und skizzieren Sie f.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mehr als 4 Stunden benötigt?

Aufgabe H 3.2:

Zeigen Sie:

(a) Die beiden Definitionen für „Ring" sind äquivalent:
Definition: $\mathcal{R}$ heißt <u>Ring</u> $:\Leftrightarrow\ \emptyset,\ A \cup B,\ A \setminus B \in \mathcal{R}\ \ (\text{falls}\ \ A, B \in \mathcal{R})$,
alternativ: $\mathcal{R}$ heißt <u>Ring</u> $:\Leftrightarrow\ \emptyset,\ AB,\ A\,\Delta B \in \mathcal{R}\ \ (\text{falls}\ \ A, B \in \mathcal{R})$.

(b) $\mathcal{G}_2$ ist ein Semiring auf $\mathbb{R}_2$.

(c) Ist $\mathcal{S}$ ein Semiring, dann ist die Menge $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ der Figuren,
$\mathcal{R}_{\mathcal{S}} := \{\sum_{i=1}^{m} A_i\,,\ A_i \in \mathcal{S}, m \in \mathbb{N}^*\}$, ein (Mengen-)Ring.

Aufgabe H 3.3:

Zeigen Sie, dass ein (Mengen-)Ring auch ein „Algebraischer Ring" ist (vgl. Ring der ganzen Zahlen, Polynomring), und zwar mit

$\Delta :\ A, B \mapsto A\,\Delta B$ als Addition,
$\cap :\ A, B \mapsto A \cap B$ als (kommutative) Multiplikation,
$\emptyset$ als Nullelement.

Anmerkungen:

(a) $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ ist ein „Algebraischer Ring", wenn $(\mathcal{R}, +)$ eine kommutative Gruppe und $(\mathcal{R}, \cdot)$ eine Halbgruppe ist und die Distributiv-Gesetze gelten.

(b) Man beachte $1_{AB} = 1_A \cdot 1_B$ und $1_{A\Delta B} = 1_A + 1_B \pmod 2$.