Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Dpt. Mathematik, Schwerpunkt Stochastik

Übungen zur Mathematischen Stochastik

Hausaufgabenblatt 2

Ausgabe am Freitag, 3.11.06
Abgabe am Freitag, 10.11.06, 14:20 Uhr

Aufgabe H 2.1:

Ein Pixel einer Grafik habe (z.B.) 16 Farb- und 16 Graustufen (0,1,...,15). Jede der 256 Kombinationen sei gleich häufig vertreten. Für ein „zufällig" herausgegriffenes Pixel sei X die Farbe und Y die Graustufe.
Formulieren Sie ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmodell und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
$A := \{X = 8\}$, $B := \{Y \neq 15\}$, $C := \{X \neq Y\}$, $D := \{X > Y\}$,
$E := \{X + Y = 7\}$, $F := \{X > 7 \text{ und } Y > 3\}$, $G := \{X > 7 \text{ oder } Y > 3\}$.

Aufgabe H 2.2:

Der Zustand eines Bauteils (defekt oder intakt) lasse sich mit einer einfachen Messung nicht exakt bestimmen:

Wenn ein Defekt vorliegt, zeige die Messung nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% einen Defekt an.
Wenn kein Defekt vorliegt, wird mit W. 5% trotzdem ein Defekt angezeigt.
Die Wahrscheinlichkeit eines Defekts sei 1%.

(a) Formulieren Sie die obigen Angaben und die folgenden Fragen mit geeigneten Ereignissen (auch ohne W-Modell).
(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Defekt vorliegt, wenn bei der einfachen Messung ein Defekt angezeigt wird?
(c) Wie groß ist bei der Anzeige „kein Defekt" die Wahrscheinlichkeit, dass trotzdem ein Defekt vorliegt?
(d) Was fällt Ihnen bei den Zahlenwerten auf? Haben Sie eine Erklärung?

Aufgabe H 2.3:

(a) Zeigen Sie, dass mit A und B auch A und B^c stoch. unabhängig sind.
(b) Zeigen Sie (evtl. unter Verwendung von (a)), dass mit A, B, C auch A, B, C^c und A, B^c, C^c stoch. unabhängig sind.
(c) Wie würden Sie vorgehen, um zu zeigen:
„Mit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sind auch $B_1, B_2, \ldots, B_n$ stoch. unabhängig, wenn jedes B_i aus $\{A_i, A_i^c, \Omega\}$ beliebig gewählt wird."
Geben Sie nur die Beweisstruktur an (mit kurzer Begründung).