Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Dpt. Mathematik, Schwerpunkt Stochastik

Übungen zur Mathematischen Stochastik

Hausaufgabenblatt 12

Ausgabe am Freitag, 26. 1. 07
Abgabe am Freitag, 2. 2. 07 um 14:20 Uhr

Aufgabe H 12.1: (6 Punkte)

Aus N Geräten, von denen K fehlerhaft seien, werden n Stücke zu Prüfzwecken zufällig ausgewählt (ohne Zurücklegen).
Es sei $X_i = 1$ $(= 0)$, falls das i-te ausgewählte Gerät fehlerhaft (fehlerfrei) ist.

(a) Formulieren Sie ein Modell für das Prüfprotokoll.
Warum ist EX_i, $\mathrm{Var}X_i$ und $\mathrm{Kov}(X_i, X_j)$ $(i \neq j)$ unabhängig von i und j?
Warum reicht für $EX_1, \mathrm{Var}X_1$ [bzw. $\mathrm{Kov}(X_1, X_2)$] ein Modell mit $n=1$ [2]?
Zeigen Sie damit $V_1 := \mathrm{Var}X_1 = K(N-K)/N^2$, $\mathrm{Kov}(X_1, X_2) = -V_1/(N-1)$.

(b) Bestimmen Sie für die Gesamtzahl Z der ausgewählten fehlerhaften Geräte EZ und $\mathrm{Var}Z$ (unter Verwendung von (a), Kontrolle s. Vorlesung/Buch).

Aufgabe H 12.2: (6 Punkte)

In einem stark vereinfachten, einstufigen Optionsmodell muss eine ZV H durch Wahl von p und m $(\in \mathbb{R})$ so in Summanden $H = p + m \cdot Y + Z$ zerlegt werden, dass EZ^2 minimal wird. Dabei ist

– H der (zufällige) Betrag, den die Bank am Ende an den Kunden zahlen muss,
– p der Preis, den der Kunde am Anfang an die Bank zahlt (der Optionspreis),
– m die Menge an Aktien (oder Devisen), die die Bank zur Risiko-Absicherung am Anfang kauft und am Ende verkauft,
– Y die relative Kurssteigerung dieser Aktien (neuer Kurs : alter Kurs) und
– Z die Zuzahlung der Bank am Ende, EZ^2 ist das „Risiko“ der Bank, **das durch Wahl von p und m minimiert werden soll.**

Die gemeinsame Verteilung von Y und H sei bekannt.

(a) Zeigen Sie, dass „EZ^2 minimal“ äquivalent ist zu „$EZ = 0$ und $\mathrm{Var}Z$ minimal“, und bestimmen Sie die optimalen Werte von p und m sowie den zugehörigen Wert von EZ^2 (in Abhängigkeit von EH, EY, $\mathrm{Var}H, \ldots$).

(b) Was ergibt sich für den (einfachen) Fall, dass Y nur die Werte u und d („up“, „down“) mit Wahrscheinlichkeit q und $1-q$ annimmt und dass $H = h(Y)$ ist? (p, m als Funktion von u, d und q)

Hinweis: H und Y lassen sich mit Hilfe einer gemeinsamen $B(q)$-ZV X ausdrücken.