Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Dpt. Mathematik, Schwerpunkt Stochastik

Übungen zur Mathematischen Stochastik

Hausaufgabenblatt 11

Ausgabe am Freitag, 19. 1. 07
Abgabe am Freitag, 26. 1. 07 um 14:20 Uhr

Aufgabe H 11.1:

Berechnen Sie für die unten angegebenen Funktionenfolgen $(f_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ den Limes f (für $n \to \infty$) sowie die λ-Integrale $\int f_n \, d\lambda$ und $\int f \, d\lambda$.
Überprüfen Sie die Gültigkeit der Voraussetzungen und Folgerungen der drei Vertauschungs-Sätze (bzgl. $\int$ und lim) aus der Vorlesung.

(a) $f_n = 1_{(n,\infty)}$, (b) $f_n = -1_{(n,\infty)}$, (c) $f_n = \frac{1}{n} 1_{(0,n]}$, (d) $f_n = n\, 1_{(0,1/n^2]}$.

Geben Sie die Ergebnisse tabellarisch an. Lediglich die Existenz oder Nicht-Existenz einer Majorante ist ausführlicher zu begründen.

Aufgabe H 11.2:

Seien $\mu_n,\ n = 1, 2, \dots$ Maße über $(\Omega, \mathcal{A})$, und $f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sei eine messbare Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass $\mu := \sum_n \mu_n$ ein Maß ist ($\mu(A) := \sum_n \mu_n(A)$).

(b) Wie beweist man $\int f \, d(\sum_n \mu_n) = \sum_n \int f \, d\mu_n$?

Aufgabe H 11.3:

In einem Lager mit Anfangsbestand $c > 0$ habe die (nicht-negative) Nachfrage Y für eine Bestellperiode eine Verteilung $P^Y = \mu$ mit endlichem Erwartungswert $EY = \int y \, \mu(dy)$.
Die Folgekosten H_c sollen abhängig vom Endbestand $Z := c - Y$ die Form $h(Z) = h_L Z^+ + h_F Z^-$ besitzen mit $h_L > 0$, $h_F > 0$. Skizze!
(Dabei sind h_L und h_F die sogenannten Lager- und Fehlmengenkosten.)

Zeigen Sie mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz, dass die erwarteten Folgekosten $EH_c = \int h(c-y) \, \mu(dy) = \int h(c-y) \, 1_{[0,\infty)}(y) \, \mu(dy)$ eine stetige Funktion von c sind.

Hinweis: Benutzen Sie eine Folge $c_n \to c_0$, skizzieren Sie die Integranden für mehrere c_n aus $[c_0 - \varepsilon, c_0 + \varepsilon]$, und zeigen Sie, dass es eine Majorante der Form $a + b\,y$ gibt.