Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Dpt. Mathematik, Schwerpunkt Stochastik

Mathematische Stochastik

Inhalt von Abschnitt 6.9 (4. Aufl.)

Konvergenzbegriffe und Grenzwertsätze

Beispiel: $EY_n \to c$, $\mathrm{Var} Y_n \to 0 \;\Rightarrow\; Y_n \to c$?

Gegeben: $X, X_1, X_2, \ldots \in \overline{\mathcal{F}}$. Gesucht: Grenzverhalten von X_n für $n \to \infty$.

Definition **„Konvergenz“**: (a) $X_n \to X$ (punktweise): $\Leftrightarrow X_n(\omega) \to X(\omega)\ \forall \omega$.

(b) $X_n \xrightarrow{P-f.s.} X$ (P-fast-sicher):$\Leftrightarrow \exists N$ mit $P(N)=0$ und $X_n(\omega) \to X(\omega)\ \forall\, \omega \in N^c$.

(c) $X_n \xrightarrow{st} X$ (stochastisch) :$\Leftrightarrow P(|X_n - X| < \varepsilon) \to 1\ \forall\, \varepsilon > 0$.

(d) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$ (in $\mathcal{L}^p$, $p \geq 1$) :$\Leftrightarrow ||X_n - X||_p \to 0 \quad (||Y||_p := (\int |Y|^p dP)^{1/p})$.

(e) $X_n \xrightarrow{V} X$ (nach Verteilung) :$\Leftrightarrow F^{X_n}(t) \to F^X(t)\ \forall\, t$ mit $P^X(\{t\}) = 0$ (in $\mathbb{R}$).

Beispiel: $X_n \sim \mathcal{N}(0, 1/n)$, $X \sim \varepsilon_0$, $F^{X_n}(t) = \Phi(t \cdot \sqrt{n})$, $F^X(t) = 1_{[0,\infty)}(t)$ ($t=0$?).

Für $X_n \to X$ gilt: „punktw.“ $\Rightarrow$ P-f.s. $\Rightarrow$ stoch., $\mathcal{L}^p \Rightarrow \mathcal{L}^1 \overset{(*)}{\Rightarrow}$ stoch. $\Rightarrow V$.

Zu $(*)$: Chebyshev-Markov-Ungleichung:

$$P(|Y| \geq \varepsilon) \leq E\,|Y|^p / \varepsilon^p.$$

Bew.: $P(|Y| \geq \varepsilon) = \int g(Y)\, dP$ mit
$g(y) := 1_{(-\varepsilon,\varepsilon)^c}(y) \leq |y|^p / \varepsilon^p$.

Schwaches und starkes Gesetz der großen Zahlen

Def.: $X_1, X_2, \ldots$ erfüllt das schwache [starke] Gesetz der großen Zahlen

:$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\widetilde{S}_n := \frac{1}{n}(S_n - ES_n) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_n - EX_n) \xrightarrow{st} 0$ $[\xrightarrow{P-f.s.} 0]$. (X_i i.v. $\Rightarrow$?)

Satz: $X_1, X_2, \ldots$ unkorreliert und $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var} X_i \to 0$ (o. $\mathrm{Var} X_i = \mathrm{Var} X_1 < \infty$)

$\Rightarrow$ (X_n) erfüllt das **schwache Gesetz** der großen Zahlen.

Beweis: $\mathrm{Var}(\frac{1}{n}S_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var} X_i \Rightarrow \frac{1}{n}\widetilde{S}_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} 0 \Rightarrow \frac{1}{n}\widetilde{S}_n \xrightarrow{st} 0$.

Beispiele: 1. $X_n \sim B(p) \Rightarrow \frac{1}{n}S_n \xrightarrow{st} p$ $\left(\frac{1}{n}(S_n - n\,p) \xrightarrow{st} 0\right)$.

2. X_i u.i.v. $\Rightarrow \widehat{F}_n^X(t) := \frac{1}{n}\sum_1^n 1_{\{X_i \leq t\}} \xrightarrow{st} E\,1_{\{X_i \leq t\}} = F^{X_1}(t),\ t \in \mathbb{R}$.

Satz: $X_1, X_2, \ldots$ stoch. unabh., identisch verteilt, $E|X_i| < \infty$

$\Rightarrow$ (X_n) erfüllt das **starke Gesetz** der großen Zahlen.

Zentraler Grenzwertsatz

Def.: $X_1, X_2, \ldots$ erfüllt den Zentralen Grenzwertsatz $\Longleftrightarrow$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)}{\mathrm{Str}(\sum_{i=1}^n X_i)} \xrightarrow{V} Y \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Satz: $X_1, X_2, \ldots$ (z.B.) stoch. unabhängig, identisch verteilt, $\mathrm{Var} X_i < \infty$

$\Rightarrow$ (X_n) erfüllt den Zentralen Grenzwertsatz.