Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Dpt. Mathematik, Schwerpunkt Stochastik

Mathematische Stochastik

Ergänzungen zu 6.8 (Fortsetzung)

Folgerungen aus dem Satz von Fubini:

1. Der Satz von Ionescu-Tulcea (Satz 4.4) gilt auch für allg. Koppelung.
2. Ist f_1 μ_1-Dichte von P_1, f_2^1 μ_2-Ü-Dichte von P_2^1, μ_1, μ_2 σ-endlich, dann ist $f = f_1 \otimes f_2^1$ eine $\mu_1 \otimes \mu_2$-**Dichte** von $P_1 \otimes P_2^1$.
3. $X_1, \ldots, X_n$ **stoch. unabhängig**
   $\Leftrightarrow$ $P^{(X_1,\ldots,X_n)} = P^{X_1} \otimes P^{X_2} \otimes \ldots \otimes P^{X_n}$ **(Produktverteilung)**
   $\Leftrightarrow$ $P(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n \in A_n)$, $A_i \in \mathcal{A}_i$ $\forall i$.
4. **Produkt-Dichte:**
   f^{X_i} ist μ_i-Dichte von P^{X_i}, μ_i σ-endlich $(i = 1, \ldots, n)$ und $X_1, \ldots X_n$ st.u.
   $\Leftrightarrow$ $f^{X_1} \otimes f^{X_2} \otimes \ldots \otimes f^{X_n}$ ist $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$-Dichte von $P^{(X_1,\ldots,X_n)}$.
5. **Bedingte Verteilung:** Ist $P^{(X_1,X_2)} = P^{X_1} \otimes P_2^1$,
   dann heißt $\Rightarrow P^{X_2|X_1} := P_2^1$ bedingte Verteilung von X_2 unter X_1.
6. **Existenz von bedingten Verteilungen?**
   Fall 1: Mit μ-Dichte $f^{(X_1,X_2)}$ von $P^{(X_1,X_2)}$ (und 1. Randdichte f^{X_1})
   konstruktiv mit $f^{X_2|X_1}(x_1; x_2) = f^{(X_1,X_2)}(x_1, x_2)/f^{X_1}(x_1)$ ((s. Satz 5.14).
   Fall 2: $P^{X_2|X_1}$ existiert und ist P^{X_1}-f.s. eindeutig,
   falls Ω_2' ein vollständiger, separabler metrischer Raum ist (z.B. $\mathbb{R}^n$)
   und $\mathcal{A}_2'$ in Ω_2' von den offenen Mengen erzeugt wird (s. Bauer, §44).
7. **Bedingte Erwartungswerte**
   Falls eine bedingte Verteilung $P^{X_2|X_1}$ existiert, wird der
   bedingte Erwartungswert von $g(X_2)$ **unter** $\underline{X_1 = x_1}$ definiert durch
   $$E(g(X_2)|X_1 = x_1) := \int g(x_2) P^{X_2|X_1}(x_1; dx_2) \qquad (=: h(x_1)),$$
   sofern das Integral für $g^+(x_2)$ oder $g^-(x_2)$ (oder $|g(x_2)|$) endlich ist.
   Der **bedingte Erwartungswert von** $g(X_2)$ **unter** $\underline{X_1}$ ist dann $h(X_1)$.

   Im allg. Fall wird $E(X_2|X_1)$ implizit definiert als eine ZV $h(X_1)$,
   die durch die Bedingung $\int_C h(X_1) dP = \int_C X_2 \, dP \quad \forall C \in X_1^{-1}(\mathcal{A})$
   P-f.s. eindeutig festgelegt ist.