Mathematische Stochastik

Ergänzungen zu 6.8: Allgemeine Koppelung (vgl. B/N §20 + 22)

Ziel: Allg. Koppelung $P := P_1 \otimes P_2^1$ und mehrstufiges Integral.

Definition: P_2^1 heißt **Übergangs-W-Maß** von $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$,
wenn P_2^1 eine Abbildung $(\Omega_1, \mathcal{A}_2) \to \mathbb{R}$ ist
mit $A_2 \mapsto P_2^1(\omega_1; A_2)$ ist W-Maß $\forall\, \omega_1$,
und $\omega_1 \mapsto P_2^1(\omega_1; A_2)$ ist $\mathcal{A}_1$-messbar $\forall \mathcal{A}_2$.

Definition: $P := P_1 \otimes P_2^1$ heißt **Koppelung** von P_1 und P_2^1,
wenn P_1 ein W-Maß auf $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ ist
und P_2^1 ein ÜW-Maß von $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$
und **(1)** $P_1 \otimes P_2^1(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} P_1(d\omega_1) P_2^1(\omega_1, A_2)$ mit $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$,
bzw. **(2)** $P(A) = \int P_1(d\omega_1) \int P_2^1(\omega_1; d\omega_2) 1_A(\omega_1, \omega_2)$ mit $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

Zum Beweis von (2) benötigt man
(a) die Messbarkeit von $\omega_2 \mapsto 1_A(\omega_1, \omega_2)$ bzgl. $\mathcal{A}_2$ $\forall \omega_1$,
(b) die Messbarkeit von $\omega_1 \mapsto \int P_2^1(\omega_1; d\omega_2) 1_A(\omega_1, \omega_2)$ bzgl. $\mathcal{A}_1$ $\forall \omega_2$.

Den Beweis zu (a) findet man in B/N, Aufg. 20.2+3.
Der Beweis zu (b) ist aufwendig, er benötigt „Dynkin-Systeme“ wie im Beweis des Eindeutigkeitssatzes für Maße (s. B/N, Lemma 40.1).

Für iterierte Integrale über W-Maße mit R-/λ- oder Z-Dichten benötigt man:

Folgerung: Für ein ÜW-Maß P_2^1 mit Ü-Dichte $h(\omega_1; \omega_2)$ bzgl. eines σ-endlichen Maßes μ gilt entsprechend zu (2):

(3) $P(A) = \int P_1(d\omega_1) \int \mu(d\omega_2) h(\omega_1; \omega_2) 1_A(\omega_1, \omega_2)$ mit $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

Beweis: Zu einem σ-endl. Maß auf Ω_2 gibt es eine Folge (E_n) mit $\mu(E_n) < \infty$ und $\sum_n E_n = \Omega_2$. Also gelten auch hierfür obige Eigenschaften.

Satz von Fubini: Für eine $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-$\overline{\mathbb{R}}$-messb. Fkt. g und P_1, P_2^1 wie oben gilt $\int g \, d(P_1 \otimes P_2^1) = \int P_1(dx_1) \int P_2^1(x_1; dx_2)\, g(x_1, x_2)$,
falls $g \geq 0$ oder die r.S. für g^+ oder g^- (oder $|g|$) endlich ist.

Entsprechend gilt für σ-endliche Maße μ_1, μ_2

$$\int g \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int \mu_1(dx_1) \int \mu_2(dx_2)\, g(x_1, x_2) = \int \mu_2(dx_2) \int \mu_1(dx_1)\, g(x_1, x_2).$$

Bemerkung: Die Koppelung von mehr als 2 Faktoren erhält man induktiv mit Identifikation von $(\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{n+1})$ und $(\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n) \times \Omega_{n+1}$, ...