

Mathematische Stochastik

Ergänzungen zu 6.4: Das Maß-Integral (Fortsetzung)

Satz v.d. mon. Konv. (s.o.): $f_n \in \overline{\mathcal{F}}, 0 \leq f_n \uparrow f \Rightarrow \lim_n \int f_n d\mu = \int \lim_n f_n d\mu$.

Beweis: (a) $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f \Rightarrow \int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu \Rightarrow$ Beh. mit „ \leq “.

(b) **Z.z.** l.S. $\geq \int g d\mu \forall g \in \mathcal{F}^*, g \leq f$. Idee: g wird gestutzt.

$g_n := c g 1_{B_n}$ mit $c < 1, B_n := \{\omega : c g(\omega) \leq f_n(\omega)\} \Rightarrow B_n \uparrow \Omega$

$[f(\omega) = 0 \Rightarrow g(\omega) = 0 // f(\omega) > 0 \Rightarrow c g(\omega) < f(\omega) \Rightarrow \exists f_n \dots]$

\Rightarrow l.S. $\geq \int f_n d\mu \geq \int f_n 1_{B_n} d\mu \geq c \int g 1_{B_n} d\mu \stackrel{(*)}{\uparrow} c \int g 1_{\Omega} d\mu$.

\Rightarrow l.S. $\geq c \int g d\mu \forall c < 1$, dann $c \uparrow 1, (*)$ mit $g = \sum a_i 1_{A_i}$.

Lemma v. Fatou: $f_n \in \overline{\mathcal{F}}, f_n \geq 0 \Rightarrow \int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$, entspr.

$f_n \leq 0 : \int (\limsup f_n) d\mu \geq \limsup \int f_n d\mu$. Merke: $\int (\inf f_n) d\mu \leq [\inf] \int f_n d\mu$.

Beweis: $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n \geq k} f_n =: \lim_k g_k, g_k \uparrow \Rightarrow \int \lim_k g_k d\mu = \lim_k \int \inf_{n \geq k} f_n d\mu \leq \liminf_k \int f_n d\mu$.

Varianten zu M.K. u. L.v.F.: $f_n \geq -g$ mit $g \geq 0, \mu$ -int., Bew. mit $\tilde{f}_n := f_n - g$.

Majorisierte Konv.: $f_n \in \overline{\mathcal{F}}, f_n \rightarrow f, |f_n| \leq g, g \mu$ -int. $\Rightarrow \lim \int f_n d\mu = \int \lim f_n d\mu$.

Beweis: $\limsup \int f_n d\mu \leq \int \limsup f_n d\mu = \int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu, \Rightarrow$ „ $=$ “.

Schreibweise: $\int_A f d\mu := \int f 1_A d\mu$, z.B. $\int_{(a,b)} f d\lambda$.

Definition: (a) $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ heißt μ -Nullmenge (Nullmenge).

(b) $R \mu$ -f.s. (R gilt μ -fast sicher) $:\Leftrightarrow \{\omega \in \Omega : R(\omega) \text{ gilt nicht}\} \subset N$ mit $\mu(N) = 0$.

Beisp.: $f = g \mu$ -f.s., $f \rightarrow g \mu$ -f.s., auch $f = g [\mu], f = g \mu$ -a.e. (almost everywhere).

Folgerungen: (a) $\mu(N) = 0 \Rightarrow \int_N f d\mu = 0$. (b) $f = g \mu$ -f.s. $\Rightarrow \int f d\mu = \int g d\mu$.

(c) $f \geq 0, \int f d\mu = 0 \Rightarrow f = 0 \mu$ -f.s. (d) $f \mu$ -integr. $:\Leftrightarrow \int f d\mu$ endl. $\Rightarrow f$ endl. μ -f.s.

(e) $f, g \mu$ -int., $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow f = g \mu$ -f.s.

Bem.: Bei „Mon.Konv.“, „L.v.Fatou“, „Maj.Konv.“ genügen Vorauss. mit μ -f.s.

μ -Dichten: Satz: $(\Omega, \mathcal{A}, \mu), f, g \in \overline{\mathcal{F}}, f \geq 0 \Rightarrow \nu : A \mapsto \nu(A) := \int_A f d\mu$ ist e. Maß

und $\int g d\nu = \int g f d\mu (*)$, falls l.S. o. r.S. ex.. Beweis (*): 1. $g = 1_A$ n.Def., 2. g elem.

Def.: (a) f (wie oben) heißt μ -Dichte von ν . (b) $\mu_a(A) := |A| : \text{Zählmaß}$.

Folg.: Falls ν σ -endlich, dann ist $f \mu$ -f.s. eindeutig bestimmt [nach Folg. (e)].

Spezialfall: P mit Z-Dichte $f : \Omega$ abz., $\mu_a(A) := |A| \Rightarrow P(A) = \int_A f d\mu_a = \sum_A f(\omega)$.

Trafo-Formel: $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \xrightarrow{X} (\Omega', \mathcal{A}', \mu^X) \xrightarrow{g} (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}}) \Rightarrow \int g(X) d\mu = \int g d\mu^X$ (ex.?)

Anwend. auf $Eg(X), EX$: (a) $Eg(X) = \int g(X) dP = \int g dP^X [= \int g(x) P^X(dx)]$.

(b) P^X habe μ -Dichte $f^X : Eg(X) = \int g dP^X = \int g f^X d\mu [= \int g(x) f^X(x) \mu(dx)]$.

(c) P^X habe Z-/ μ_a -Dichte $f^X : Eg(X) = \int g dP^X = \int g f^X d\mu_a = \sum_{x \in \Omega'} g(x) f^X(x)$.

(d) P^X habe R-/ λ -Dichte $f^X : Eg(X) = \int g dP^X = \int g f^X d\lambda = \int g(x) f^X(x) dx$.