Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Dpt. Mathematik, Schwerpunkt Stochastik

Mathematische Stochastik

Ergänzungen zu 6.4: Das Maß-Integral (vgl. B/N §17)

Ziel: Def. von $\int f\,d\mu$ für $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $f \in \overline{\mathcal{F}} := \{f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}},\ \mathcal{A}\text{-}\overline{\mathbb{B}}\text{-messbar}\}$.
Beisp.: $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \lambda)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, messbar, R-int. $\Rightarrow \int f\,d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ (s.u.).
Def. in 3 Stufen: **1.** $f(\omega) = \sum_{i=1}^m a_i 1_{A_i}(\omega)$, **2.** $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$, **3.** $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.

Definition: $f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(\omega) = \sum_{i=1}^m a_i 1_{A_i}(\omega)$ $(A_i \in \mathcal{A}_i)$ heißt **elementar**.
Es sei o.E. $\sum_1^m A_i = \Omega$ (A_i disjunkt!) und $\mathcal{F}^* := \{f : f \text{ elementar}\}$ $[=E(\Omega, \mathcal{A})]$.
Bemerkung: Eine Elementarfkt. muss keine Treppenfkt. sein, z.B. $f = 1_{\mathbb{Q}}$.

Lemma: Zu $f \in \overline{\mathcal{F}}$, $f \geq 0$ ex. $g_n \in \mathcal{F}^*$ mit $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots$ und $\lim_n g_n = f$.
Beweis: $g_n(\omega) := \frac{i-1}{2^n}$ für $f(\omega) \in \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i-1}{2^n}\right)$, $i = 1, \ldots, n{\cdot}2^n$, bzw. $:= n$ für $f(\omega) \geq n$.

Definition: 1. Für $g = \sum_{i=1}^m a_i 1_{A_i} \in \mathcal{F}^*$ sei
$$\int^* g\,d\mu := \sum_{i=1}^m a_i\,\mu(A_i), \quad \text{speziell } \int^* 1_A\,d\mu = \mu(A).$$
2. Für $f \in \overline{\mathcal{F}}$, $f \geq 0$ sei $\quad \int f\,d\mu := sup\{\int^* g\,d\mu : g \in \mathcal{F}^*,\ g \leq f\}$.
3. Für $f \in \overline{\mathcal{F}}$ sei $\quad \int f\,d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$,
falls $\int f^+ d\mu < \infty$ **oder** $\int f^- d\mu < \infty$, andernfalls existiert $\int f\,d\mu$ nicht.
(vgl. $f = f^+ - f^-$ mit $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$, $0 \leq \int f^{\pm} d\mu \leq \infty$).
4. Falls $\int f\,d\mu$ existiert, heißt $\int f\,d\mu$ (auch $=: \int f(\omega)\,\mu(d\omega)$) μ-Integral von f (allgemein **Maß-Integral**) und f heißt **μ-quasi-integrierbar**.
5. Falls $\int f^+\,d\mu$ **und** $\int f^-\,d\mu$ endlich sind, heißt f **μ-integrierbar**.
6. Ist $\mu = P$ ein W-Maß und $f = X \in \overline{\mathcal{F}}$, dann nennt man $EX := \int X\,dP$ (auch $E_P X$) den Erwartungswert von X (bzgl. P).

Folgerungen: Die Existenz der μ-Integrale sei stets vorausgesetzt.
(a) $\int^* g\,d\mu$ ist unabhängig von der Darstellung $g = \sum_{i=1}^m a_i 1_{A_i} = \sum_{j=1}^n b_j 1_{B_j}$.
(b) Für $g \in \mathcal{F}^*$ ist $\int g\,d\mu = \int^* g\,d\mu$, also im Folg. $\int$ statt $\int^*$. [Hierzu (c1)]
(c) Für $f, g \in \overline{\mathcal{F}}$ mit $g \leq f$ gilt $\int g\,d\mu \leq \int f\,d\mu$. [Beweis in 3 Stufen, wie Def.]
(d) Für $f \in \overline{\mathcal{F}}$, $c \in \mathbb{R}$ gilt $\int (c\,f)\,d\mu = c \int f\,d\mu$. [Fallunterscheidung $c >/< 0$]
(e) Für $f, g \in \overline{\mathcal{F}}$ gilt $\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$, falls $f+g$ und r.S. definiert.
(f) Für $f \in \overline{\mathcal{F}}$ gilt $|\int f\,d\mu| \leq \int f^+\,d\mu + \int f^-\,d\mu = \int |f|\,d\mu$ [vgl. Folg. 6.4].
Bemerkung: Zum Beweis von (e), Stufe 2, benötigt man den folgenden Satz.

Satz von der monotonen Konvergenz: Für $f_n \in \overline{\mathcal{F}}$ mit $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ gilt $f := \lim_n f_n \in \overline{\mathcal{F}}$ und $\lim_n \int f_n\,d\mu = \int \lim_n f_n\,d\mu$. (Beweis folgt.)

Folgerung: Für $f_i \in \overline{\mathcal{F}}$, $f_i \geq 0$ gilt $\int \sum_{i=0}^\infty f_i\,d\mu = \sum_{i=0}^\infty \int f_i\,d\mu$.
Beweis: $0 \leq g_n := \sum_0^n f_i \uparrow \sum_0^\infty f_i \Rightarrow$ (mon.K.) $\int \lim g_n d\mu = \lim \int \sum_0^n \ = lim \sum_0^n \int f_i d\mu$.