Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Dpt. Mathematik, Schwerpunkt Stochastik

Mathematische Stochastik

Ergänzungen zu 5.9

A In 5.2 bis 5.8 behandelte Begriffe

Bildmaß P^X = Verteilung von X, $f^X(k) = P(X = k)$, $F^X(t) = P(X \leq t)$,
Hypergeometrische und Binomial-Verteilung,
Poisson- und Normal-Approximation,
Geometrische und Negative Binomial-Verteilung, $P(W_1 > k) = (1-p)^k$,
Transformation von R-Dichten und Verteilungsfunktionen, u.a. linear,
Chi-Quadrat-Verteilung.

B Produkt-σ-Algebra

Definition: $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ seien Messräume, $\Omega := \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$.
Dann heißt $\mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n := \mathcal{A}_\Omega(\mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_n)$ die Produkt-σ-Algebra von $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$. Dabei ist $\mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_n := \{A_1 \times \ldots \times A_n,\ A_i \in \mathcal{A}_i\}$.

Satz: (a) Für $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{\Omega_i}(\mathcal{E}_i)$ gilt $\mathcal{A}_\Omega(\mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_\Omega(\mathcal{E}_1 \times \ldots \times \mathcal{E}_n)$,
falls die $\mathcal{E}_i$ ausschöpfend sind, d.h. falls es $E_{ik} \in \mathcal{E}_i$ gibt mit $E_{ik} \uparrow \Omega_i$.
(b) Die Produkt-Bildung „$\otimes$" von σ-Algebren ist (wie „$\times$") assoziativ,
d.h. $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \otimes (\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3) =: \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$.
(c) Für die Borel-σ-Algebra $\mathbb{B}^k$ über $\mathbb{R}^k$ gilt $\mathbb{B}^k = \bigotimes_1^k \mathbb{B}$.

Beweis ($n=2$): (a) Man zeigt $\mathcal{A}_\Omega(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) = \mathcal{A}_\Omega(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{A}_2) = \mathcal{A}_\Omega(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$ mit dem „Good-Sets-Principle". (b),(c) folgt aus (a), bei (c) mit $\mathcal{G}_k = \mathcal{G}_1 \times \ldots \times \mathcal{G}_1$.

Bemerkung: $\mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_\Omega(\cup_{i=1}^n X_i^{-1}(\mathcal{A}_i))$ mit sog. „Zylindermengen".
Definition für $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in I$ (bel.): $\Omega := \times_{i\in I} \Omega_i$, $\otimes_{i\in I} \mathcal{A}_i := \mathcal{A}_\Omega(\cup_{i\in I} X_i^{-1}(\mathcal{A}_i))$.

C In 5.9 behandelte Begriffe

Die i-te Projektion (messbar, genauer $(\otimes \mathcal{A}_k)$-$\mathcal{A}_i$-messbar), Randverteilung, Randdichte, $(P_1 \otimes \ldots \otimes P_n)^{X_i} = P_i$, gemeinsame Verteilung $P^{(Y_1,\ldots,Y_n)}$
($(Y, \ldots, Y_n) : \Omega \to \Omega_1' \times \ldots \times \Omega_n'$ ist messbar, genauer $\mathcal{A}$-$(\otimes \mathcal{A}_k')$-messbar),
i-te Randverteilung von $P^{(Y_1,\ldots,Y_n)}$ ist P^{Y_i}, austauschbare Zufallsvariable.

D In 5.10 und 5.11 behandelte Begriffe

Koppelungs-Zerlegung, bedingte Dichte/Verteilung, stoch. unabhängige Zufallsvariable, Produktdichte, „Erblichkeit" der stoch. Unabhängigkeit,
stoch. unabh. Ereignisse $A_1, \ldots, A_n \iff 1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ stoch. unabh. ZV,
Verteilung einer Summe, Faltung, $P^X * P^Y$, $f^X * f^Y$, Faltungsformel, Beispiele.