Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Dpt. Mathematik, Schwerpunkt Stochastik

Mathematische Stochastik

Ergänzungen zu 5.1

A Messbare Abbildungen (Für Details s. auch Behnen/Neuhaus § 17)

Begriffe: Zufallsvariable, Urbildfunktion $X^{-1}(A') = \{X \in A'\}$, Messbarkeit.

Definition 5.3: Die Paare $(\Omega, \mathcal{A}), (\Omega', \mathcal{A}')$ heißen *Messräume*.
Eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ heißt $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-*messbar* (kurz: messbar),
falls $f^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A}$ (bzw. $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\ \forall A' \in \mathcal{A}'$).

Satz: Mit $f : \Omega \to \Omega'$ und $g : \Omega' \to \Omega''$ ist auch $g \circ f : \Omega \to \Omega''$ messbar.
Beweis: Es gilt $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{A}'') \subset \mathcal{A}$, weil $g^{-1}(\mathcal{A}'') \subset \mathcal{A}'$ und $f^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A}$.

Satz: $f : \Omega \to \Omega'$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}(\mathcal{E}')$-messbar, falls $f^{-1}(\mathcal{E}') \subset \mathcal{A}$.
Beweis: Das System $f * \mathcal{A} := \{A' \in \mathcal{P}(\Omega') : f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$ ist eine σ-Algebra.
Dies folgt aus $f^{-1}(\Omega') = \Omega\}$, $f^{-1}(A'^c) = (f^{-1}(A'))^c$ und $f^{-1}(\cup A'_i) = \cup(f^{-1}(A'_i)$.
Nach Voraussetzung ist $\mathcal{E}' \subset f * \mathcal{A}$, damit ist auch $\mathcal{A}(\mathcal{E}') \subset f * \mathcal{A}$.

Bemerkung: Dieses Beweisprinzip nennt man das **Good-Sets-Principle**.
Um zu zeigen, dass Eigenschaft G in $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ gilt, zeigt man, dass G in $\mathcal{E}$ gilt und dass $\mathcal{G} := \{A \in \mathcal{A}(\mathcal{E})(\text{oder} \in \mathcal{P}(\Omega))$ mit Eigenschaft G$\}$ eine σ-Algebra ist.

Satz: Sind $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ die offenen Mengen in Ω, Ω', $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{O}), \mathcal{A}' = \mathcal{A}(\mathcal{O}')$ und ist
$f : \Omega \to \Omega'$ **stetig**, dann ist f auch messbar. (Speziell $\Omega = \mathbb{R}^k$, $\Omega' = \mathbb{R}^n$)
Beweis: Bei stetigen Abbildungen ist das Urbild offener Mengen offen.

Satz: Mit $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ ist auch $f := (f_1, \dots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ messbar.
Beweis $(n = 2)$: $f^{-1}((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) = f_1^{-1}((a_1, b_1]) \cap f_2^{-1}((a_2, b_2])$.Beweis

Folg. 5.1 (d): $f + g = h \circ (f, g)$ mit $h(x, y) := x + y$ (stetig), u.s.w..

Bemerkung: f ist stückweise stetig $\Leftrightarrow$ $f = \sum_{k=1}^m f_k 1_{A_k}$ mit $A_k \in \mathcal{A}$, f_k stetig.

Satz: $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist messbar $\Leftrightarrow$ $\{f > a\} \in \mathcal{A}\ \forall a \in \mathbb{R}$, ebenso für $\geq$, $<$, $\leq$.
Beweis: Auch $\{(a, \infty], a \in \mathbb{R}\}$ ist ein Erzeuger von $\mathbb{B}$.

Beweis **Folg. 5.1 (e):** f_n messbar $\Rightarrow \{f_n \leq a\} \in \mathcal{A}\ \ \forall a \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \{\sup_n f_n \leq a\} = \cap_n \{f_n \leq a\} \in \mathcal{A} \Rightarrow \sup_n f_n$ messbar,
$\inf_n f_n = -\sup_n(-f_n)$, $\lim_n f_n = \limsup_n f_n = \inf_n(\sup_{k \geq n} f_k)$.

B Erweiterung von $\mathbb{R}$ zu $\overline{\mathbb{R}}$

„Erweitert reellwertige“ Funktionen. $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
Die Borel-σ-Algebra über $\overline{\mathbb{R}}$ ist $\overline{\mathbb{B}} := \mathcal{A}(\mathcal{G}_1 \cup \{\infty\})$.
Nicht definiert ist: $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $\infty / \pm\infty$, $-\infty / \pm\infty$.