Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Dpt. Mathematik, Schwerpunkt Stochastik

Mathematische Stochastik

Ergänzungen zu 3.2

A In 3.2 behandelte Begriffe

Riemann-Dichte, Anwendung von Fortsetzungs- u. Eindeutigkeitssatz (o.Bew.), Rechteck-Verteilung (stetige Gleichverteilung), Exponential-Verteilung, Normalverteilung, Standard-Normalverteilung, Gamma- und Beta-Verteilung, R-Dichten in $\mathbb{R}^n$, stetige Gleichverteilung in $\mathbb{R}^n$.

B Fortsetzungs- und Eindeutigkeitssatz: Präzisierung und Beweis-Skizze

Prinzip: Ein Maß μ wird auf einem „geeigneten" Erzeuger $\mathcal{E}$ definiert (z.B. $\mathcal{G}_1$) und dann auf $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ fortgesetzt ($\mathcal{A}(\mathcal{G}_1) = \mathbb{B}$).

Definition: $\mathcal{S}$ heißt Semi-Ring $:\Leftrightarrow \emptyset \in \mathcal{S},\ AB \in \mathcal{S},\ A \setminus B = \sum_{i=1}^m C_i,\ C_i \in \mathcal{S}$.

Anwendung: $\mathcal{G}_1$ ist ein Semi-Ring, ebenso $\mathcal{G}_n$.

Definition: $\mathcal{R}$ heißt Ring $:\Leftrightarrow \emptyset,\ A \cup B,\ A \setminus B \in \mathcal{R}$ ($\Leftrightarrow \emptyset,\ AB,\ A\Delta B \in \mathcal{R}$).

Folgerung: $\mathcal{S}$ ist ein Semiring $\Rightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{S}} := \{\sum_{i=1}^m C_i,\ C_i \in \mathcal{S}\}$ ist ein Ring.

Anwendung: Für $\mathcal{S} = \mathcal{G}_1$ (bzw. $\mathcal{G}_n$) heißt $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ der „Ring der Figuren".

Definition: μ heißt (Prä-)Maß auf $\mathcal{E}$ $:\Leftrightarrow$ (1) $\mu(A) \geq 0\ \forall A \in \mathcal{E}$, (2′) $\mu(\emptyset) = 0$, (3′) $\mu(\sum_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$, falls $A_i \in \mathcal{E}$ und $\sum_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{E}$.

Anwendung: Zu e. R-Dichte f ist $P((a,b]) := \int_a^b f(x)dx$ ein Prämaß auf $\mathcal{G}_1$.

Beweis-Idee für σ-Additivität: eine endliche offene Überdeckung.

Fortsetzungssatz: Ein (Prä-)Maß auf e. Semi-Ring $\mathcal{S}$ besitzt e. Fortsetzung auf $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, nämlich $\mu(A) := \inf\{\sum_{i=1}^\infty \mu(B_i) : B_i \in \mathcal{S},\ \cup_{i=1}^\infty B_i \supset A\}$.

Beweis-Idee: $A \mapsto \mu(A)$ ist äußeres Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$, die Einschränkung auf $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ ist das gesuchte Maß.

Definition: $\mathcal{E}$ ist $\cap$-stabil, falls mit $A, B \in \mathcal{E}$ auch $AB \in \mathcal{E}$.

μ ist σ-endlich auf $\mathcal{E}$ $:\Leftrightarrow \exists E_i \in \mathcal{E},\ E_i \uparrow \Omega$, mit $\mu(E_i) < \infty$.

Eindeutigkeits-Satz: Zwei Maße μ_1, μ_2 auf $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ mit „$\mu_1 = \mu_2$ auf $\cap$-stabilem Erzeuger $\mathcal{E}$ und dort σ-endlich" sind gleich.

Beweis-Idee: Es geht „fast" mit dem „Beweisprinzip für σ-Algebren", man braucht aber eine Variante, die „Dynkin-Systeme".

Anwendung: Zu e. R-Dichte f ex. eind. P auf $\mathbb{B}$ mit $P((a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Folgerung: Durch $\lambda((a,b]) = b-a$ auf $\mathcal{G}_1$ wird auf $\mathbb{B}$ eind. e. Maß λ definiert, das Lebesgue-Maß, und λ ist translations-invariant (entspr. auf $\mathcal{G}_n$ bzw. $\mathbb{B}^n$).

Anwendung: Es ex. $B \subset \mathbb{R},\ B \notin \mathbb{B}$: Sei $x \approx y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}$. $B \subset (0,1]$ bestehe aus je 1 Repräs. aus jeder Äquiv.klasse. Sei $\mathbb{Q} \cap (-1,1] = \{r_1, r_2, \ldots\}$.
$\Rightarrow (0,1] \subset \sum_{i=1}^\infty (B+r_i) \subset (-1,2]$. Wäre $B \in \mathbb{B}$, so wäre $\lambda(B) = \lambda(B+r_i)$ definiert. Dann wäre $1 = \lambda((0,1]) \leq \sum_{i=1}^\infty \lambda(B) \leq \lambda((-1,2]) = 3$. Widerspruch!