Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Dpt. Mathematik, Schwerpunkt Stochastik



# Mathematische Stochastik

## 2.5 E Ergänzungen zu Abschnitt 2.5

### A Bisher in Kapitel 2 behandelte Begriffe

Beobachtung $\omega \in$ Merkmalraum $\Omega$, Ereignis $A \in$ Ereignis-System $\mathcal{A}$,
Mengen-Operationen $\cup, \cap, \setminus, {}^c, +, \Delta$, $AB := A \cap B$, Indikatorfunktion $1_A$,
$\sigma$-Algebra, Erzeuger $\mathcal{E}$ (Skript-E), erzeugte $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ (auch $\sigma(\mathcal{E})$),
Borel-$\sigma$-Algebra $\mathbb{B} = \mathcal{A}(\mathcal{G}_1)$, Borel-Mengen in $\mathbb{R}$,
$n$-dimensionale Intervalle $(\mathbf{a},\mathbf{b}]$,
$n$-dimensionale Borel-$\sigma$-Algebra $\mathbb{B}^n = \mathcal{A}(\mathcal{G}_n)$, Borel-Mengen in $\mathbb{R}^n$.

### B Ergänzungen zu $\mathbb{B}$

1. Zu den Borel-Mengen gehören alle endlichen Mengen, alle Intervalle, alle Halbgeraden sowie alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen.

2. Es gibt (beliebig) viele Erzeuger von $\mathbb{B}$, z.B.
die Systeme $\mathcal{G}_1^o$ und $\overline{\mathcal{G}}_1$ aller offenen bzw. abgeschlossenen Intervalle,
das System $\mathcal{J}_1$ aller Halbgeraden $(-\infty, a]$,
das System aller offenen Mengen $\mathcal{O}$.

Man zeigt: $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}(\mathcal{E}')$ und $\mathcal{E}' \subset \mathcal{A}(\mathcal{E}) \implies \mathcal{A}(\mathcal{E}) = \mathcal{A}(\mathcal{E}')$.
Dazu braucht man: $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}' \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{E}')$ und $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{E})) = \mathcal{A}(\mathcal{E})$.

### C Ergänzungen zu $\mathbb{B}^n$

1. Zu den Borel-Mengen in $\mathbb{R}^n$ gehören alle endlichen Mengen, alle $n$-dimensionalen Intervalle, alle Orthanten $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \le \mathbf{a}\}$, sowie alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen.

2. Es gibt (beliebig) viele Erzeuger von $\mathbb{B}^n$, z.B.
die Systeme $\mathcal{G}_n^o$ und $\overline{\mathcal{G}}_n$ aller $n$-dim. offenen bzw. abgeschlossenen Intervalle,
das System $\mathcal{H}_n$ aller Halbräume $\{\mathbf{x} : x_i \le a_i\}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$,
das System $\mathcal{O}_n$ aller offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$.

### D In Abschnitt 2.6 (neu) bzw. 5.1 (alt) behandelte Begriffe

Zufallsvariable/Zufallsgröße $X$ (wählt aus, komprimiert, transformiert),
durch $X$ beschreibbares Ereignis $\{X \in A'\}$, auch $\{Y = c\}$, $\{W \neq 0\}$, $\{Z \le k\}$,
Messbarkeit für Zufallsvariable $X : \Omega \to \Omega'$ mit $\sigma$-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$:
$\{X \in A'\} \in \mathcal{A}$ für alle $A' \in \mathcal{A}' \iff \underline{\mathcal{A}(X)} := \{\{X \in A'\},\ A' \in \mathcal{A}'\} \underline{\subset \mathcal{A}}$.
Bemerkung: $\mathcal{A}(X)$ kann man als Informations-Struktur von $X$ interpretieren.