

Übungen zu Stochastische Prozesse II

Aufgabenblatt 7:

Abgabe der Hausaufgaben am Do 1.6.06

Aufgabe P 7.1 (Präsenzaufgabe):

Beweisen Sie auf zwei Wegen, dass die Verweilzeit W in einem stationären Bedienungssystem $M|M|1|\infty$ mit Ankunftsrate ν und Bedienrate μ $\text{Exponential}(\mu - \nu)$ -verteilt ist. Benutzen Sie dazu die stationäre Verteilung der Kundenzahl X_t (die der ankommende Kunde antrifft), die Exponentialverteilung der **Bedienzeiten** Y_k und $W = \sum_{k=1}^{X_t+1} Y_k$.

- Rechnen Sie direkt in einem zweistufigen Modell für (X_t, W) und benutzen Sie die Faltungseigenschaft von Exponentialverteilungen.
- Benutzen Sie die Laplace-Transformierte der zufälligen Summe W .

Aufgabe P 7.2 (Präsenzaufgabe):

Überprüfen Sie Aufg. H 6.3 (b),(c) mit dem Kriterium von Kolmogorov.

Aufgabe H 7.1: In e. $M|M|K|0$ -Modell (stetige Zeit) einer Telefon-Vermittlung sollen abgewiesene Kunden durch eine „Flip-Flop-Variable“ erfasst werden: Der Zustand $i = (i_1, i_2)$ bestehe aus der Kundenzahl i_1 und der Zahl $i_2 \in \{0, 1\}$ der abgewiesenen Kunden „modulo 2“ (Ank.rate ν , Bedienrate je Leitung μ).

- Übergangsgraph? (b) Stationäre Verteilung? (c) Reversibilität?
- Mit welcher Rate gehen abgewiesene Kunden ab?

Aufgabe H 7.2:

- Zeichnen Sie den Übergangs-Graph zu einer HMKS mit Zustandsraum $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$ und $q_{12} = q_{21} = \nu$, $q_{13} = q_{23} = \mu - \nu$, $q_{31} = q_{32} = \mu/2$.
- Welche Verteilungen besitzen die Verweilzeiten in den Zuständen 1, 2, 3?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei Start in Zustand 1 mit genau k Übergängen **zum ersten Mal** nach Zustand 3 zu kommen?
- Wenn die Zustände 1 und 2 zu einem Zustand 0 vereinigt werden, was ergibt sich dann für die Übergangsraten und die Verweilzeiten?

Zusatz: Zeigen Sie mit (b)-(d): $W \sim \text{Exp}(\mu - \nu)$ (aus Aufg. P 7.1).

Aufgabe H 7.3:

Eine Telefon-Vermittlung besitze genau M mögliche Nutzer und K Leitungen.

- Modellieren Sie das System als (homogene) Markov-Kette mit stetiger Zeit.
- Bestimmen Sie die zugehörige stationäre Verteilung (π_0 nicht explizit).
- Welche Verteilung ist dies bei $K = M$?