

## Übungen zu Stochastische Prozesse II

**Aufgabenblatt 3:** Abgabe der Hausaufgaben am Do 27. 04. 04

**Aufgabe P 3.1 (Präsenzaufgabe):** Zeigen Sie:

$$\text{Für } b \in \mathcal{H}_0^2 \text{ gilt } \|I(b)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \|b\|_{\mathcal{L}^2(\Omega \times [0, T])}.$$

**Aufgabe P 3.2 (Präsenzaufgabe):**

Zeigen Sie, dass die Definition von  $I(b)$  unabhängig ist von der Wahl der approximierenden Folge.

**Aufgabe H 3.1:** (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Abbildung  $I : \mathcal{H}_0^2 \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$  stetig ist bzgl. der  $\mathcal{L}^2$ -Norm.

**Aufgabe H 3.2:** (3 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe von Aufg. P 3.1, dass die „Isometrie“ auch für  $b \in \mathcal{H}^2$  richtig bleibt:

$$\text{Für } b \in \mathcal{H}^2 \text{ gilt } \|I(b)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \|b\|_{\mathcal{L}^2(\Omega \times [0, T])}.$$

**Aufgabe H 3.3:** (6 Punkte)

Zeigen Sie:  $X_T := \int_0^T B_s dB_s = \frac{1}{2} B_T^2 - \frac{1}{2} T$ .

Hinweise: (1) Verwenden sie eine Approximation mit  $t_i := i \cdot T/n$ .

(2) Beachten Sie  $x(y-x) = \frac{1}{2}(y^2-x^2) - \frac{1}{2}(y-x)^2$ .

(3) Für  $Y \sim N(0, t)$  gilt  $EY^4 = 3t^2$ .

(4) Aus  $EZ_n \rightarrow a$  und  $\text{Var}Z_n \rightarrow 0$  folgt  $Z_n \rightarrow a$   $P$ -f.s..