Gerhard Hübner, Univ. Hamburg, Fakultät 6,
Dpt. Mathematik, Schwerpunkt Stochastik

Übungen zu Stochastische Prozesse II

Aufgabenblatt 1: Abgabe der Hausaufgaben am Do 13. 04. 04

Aufgabe P 1.1 (Präsenzaufgabe):
Vervollständigen Sie den Beweis der **Minkowski-Ungleichung**

$||X+Y||_p \le ||X||_p + ||Y||_p\,.$

(a) Warum sind die Fälle $||X||_p = \infty$ und $||Y||_p = \infty$ trivial? Woraus folgt andernfalls $||X+Y||_p < \infty$? (Vergleichen Sie dazu $a+b$ und $\max(a,b)$)

(b) Zeigen Sie die Fälle $p = 1$ und $p = \infty$.

(c) Führen Sie den Beweis für $1 < p < \infty$ und $||X||_p\,, ||Y||_p < \infty$ mit den Hinweisen $(X+Y)^p = (X+Y)(X+Y)^{p-1}$ und „Hölder“ zu Ende.

Aufgabe P 1.2 (Präsenzaufgabe):
Zeigen Sie im Beweis zu Satz MtDL unter $||X||_p < \infty$ die Gleichheit in

$||X||_p{}^p \le \frac{p}{p-1}\, E(YX^{p-1}) \overset{(\text{Hö})}{\le} \frac{p}{p-1}\, ||Y||_p ||X^{p-1}||_q = \frac{p}{p-1}\, ||Y||_p ||X||_p{}^{p-1}$

und die Behauptung $||X||_p \le \frac{p}{p-1}\, ||Y||_p\,.$

Aufgabe H 1.1: Gegeben seien i.i.d. ZV Y_i mit $P(Y_i = \pm 1) = 1/2$ und es sei $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.

(a) Bestimmen Sie $\sigma^2 := VarY_1$ sowie ES_n, ES_n^2 und $\mathrm{Var}(S_n^2)$, bis $n=4$ auch die Zahlenwerte.

(b) Zeigen Sie, dass (M_n) mit $M_n := S_n^2 - n\,\sigma^2$ ein Martingal ist.

(c) Skizzieren Sie sie die möglichen Pfade von (M_n) bis $n=4$.

Aufgabe H 1.2: Vervollständigen Sie den Beweis der **Hölder-Ungleichung**:
Für $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt $||X\,Y||_1 \le ||X||_p\, ||Y||_q\,.$

(a) Warum kann man o.E. $X > 0$, $Y > 0$ und $||X||_p\,, ||Y||_q < \infty$ voraussetzen?

(b) Verifizieren Sie $(\frac{\alpha}{\beta})^{1/p} \le (\frac{\alpha}{\beta} - 1)/p + 1 \Rightarrow \alpha^{1/p}\beta^{1/q} \le \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}$.

(c) Führen Sie den Beweis mit $\alpha := X^p/EX^p$, $\beta := Y^q/EY^q$ und $E(\;\;)$ zu Ende.