

6 B. Grenzwerte und stationäre Verteilungen

Wann existieren stationäre Verteilungen? Wann sind sie eindeutig? Gibt es eine „Struktur“? Wir beschränken uns zunächst auf **irreduzible** HMK, d.h. I ist einzige Klasse (und abgeschlossen).

6.5 Satz. Sei (X_n) irred.: (a) (X_n) transient oder null-rek. \Rightarrow es gibt keine stat. Verteilung.

(b) Ist (X_n) positiv-rekurrent, so ist $(\pi_i := \frac{1}{m_{ii}}, i \in I)$ die einzige stationäre Verteilung.

Beweis. (1) Wir zeigen in Fall (a) u. (b): Für jede stationäre Verteilung (μ_i) gilt $\mu_i = \pi_i := \frac{1}{m_{ii}}$.

Sei also (μ_i) eine stat. Verteilung und $P(X_0=i) = \mu_i$. Dann gilt $\mu_j = P(X_n=j) = \sum_{i \in I} \mu_i p_{ij}^{(n)}$.

Für Fall (a) folgt mit 6.3 (c) $p_{ij}^{(n)} \rightarrow 0$ u. mit maj. Konv. $\mu_j = 0 (\forall j)$, im Widerspruch zu $\sum \mu_i = 1$.

Für Fall (b) reicht 6.3 (b) nicht, aber mit 6.4 (a) (Césaro-Mittel) folgt:

$$\underline{\mu_j} = \frac{1}{n} \sum_1^n \mu_j = \sum_{i \in I} \mu_i \frac{1}{n} \sum_1^n p_{ij}^{(n)} \rightarrow \sum_{i \in I} \mu_i \underline{f_{ij}^*} \frac{1}{m_{jj}} \quad (*), \text{ also mit 4.6 (b) } - f_{ij}^* = 1 \forall i, j - \mu_j = \frac{1}{m_{jj}}.$$

(2) Für (b) muss man noch zeigen, dass $(\pi_i) = (\frac{1}{m_{ii}})$ eine stat. Vert. ist, also dass (G) und (N) gilt.

Statt (N) reicht $0 < \sum_{i \in I} \frac{1}{m_{ii}} < \infty$. Denn dann ist $(\frac{c}{m_{ii}})$ eine stat. Vert. und mit (1) folgt $c=1$.

Im positiv-rekurrenten Fall ist jedenfalls $\frac{1}{m_{ii}} > 0$ und aus $\sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = 1$ folgt (bei $d_j=1$) mit

6.3 (b) und L.v.Fatou $\sum_{i \in I} \frac{1}{m_{ii}} \leq 1$. Aus $p_{ii}^{(n)} = \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n-1)} p_{ji}$ folgt ebenso $\frac{1}{m_{ii}} \geq \sum_{j \in I} \frac{1}{m_{jj}} p_{ji}$,

bei $d_j \neq 1$ mit Césaro-Limes. Durch Summation über i folgt Wid. zu „>“, also „=“, \Rightarrow (G).

6.6 Satz. X sei eine beliebige HMK. Dann gilt:

(a) Es existiert eine stationäre Verteilung \iff es existiert eine positiv-rekurrente Klasse.

(b) Ist $\{K_\ell, \ell \in L\}$ die Menge der positiv-rek. Klassen und $(\alpha_\ell, \ell \in L)$ eine Zähl-Dichte auf L , so ist $\mu_i := \sum_{\ell \in L} \alpha_\ell 1_{K_\ell}(i) \frac{1}{m_{ii}}$ eine stat. Vert., und jede stat. Vert. hat diese Struktur.

Beweis. (a) folgt aus (b): „ \Leftarrow “: klar, „ \Rightarrow “: wenn Zähl-Dichte auf L ex., dann $L \neq \emptyset$.

(b1) Ist (μ_i) stat. Vert., dann gilt $\mu_j = \sum_{i \in I} \mu_i f_{ij}^* \frac{1}{m_{jj}}$ (s. (*) im Beweisteil (1) zu Satz 6.5),

Für $j \notin \cup K_\ell$ gilt $\mu_j = 0$. Sei $\alpha_\ell := \sum_{i \in K_\ell} \mu_i$, dann folgt $\sum_{\ell \in L} \alpha_\ell = 1$.

Ist $i \in K_\ell, j \in K_{\ell'}$, dann ist $f_{ij}^* = \delta_{\ell\ell'}$, also für $K(j) = K_\ell$ $\mu_j = \sum_{i \in K_\ell} \mu_i \frac{1}{m_{jj}} = \frac{\alpha_\ell}{m_{jj}}$.

(b2) Auf K_ℓ existiert eine stationäre Verteilung $(\pi_i = \frac{1}{m_{ii}})$, also $\pi_j = \sum_{i \in K(j)} \pi_i p_{ij}, j \in K_\ell (+)$.

Sei $\sum_{\ell \in L} \alpha_\ell = 1, \alpha_i := \alpha_\ell$ für $i \in K_\ell, = 0$ sonst, $\Rightarrow \mu_j = \alpha_j \pi_j$. Z.z. $\alpha_j \pi_j = \sum_{i \in I} \alpha_i \pi_i p_{ij}$:

Für $j \notin \cup K_\ell$ oder $i \notin K(j)$ ist $p_{ij} = 0$, sonst $\alpha_i = \alpha_j$, also r.S. = $\sum_{i \in K(j)} \alpha_j \pi_i p_{ij} \stackrel{(+)}{=} \alpha_j \pi_j$.

6.7 Beispiel Warteschlange, (s. 4 C. Bsp. 3 u. 5.7): Existenz von stationären Verteilungen:

Übersicht: $\alpha_n := \prod_{m=1}^n p_{m-1}/q_m, \prod_{m=1}^n q_m/p_m = p_0/(p_n \alpha_n), p_n = p, q_n = q, \alpha_n = (\frac{p}{q})^n$

X ist transient $\iff \sum_1^\infty 1/(p_n \alpha_n) < \infty$ $p > q$

X ist null-rekurrent $\iff \sum_1^\infty 1/(p_n \alpha_n) = \infty, \sum \alpha_n = \infty$ $p = q \quad \sum_0^\infty \alpha_n = 1/(1 - \frac{p}{q})$

X ist pos.-rekurrent $\iff \sum_1^\infty 1/(p_n \alpha_n) = \infty, \sum \alpha_n < \infty$ $p < q$

die stat. Verteilung ist $\pi_i = \alpha_i / \sum_0^\infty \alpha_n = 1/m_{ii}$ $\pi_i = (1 - \frac{p}{q})(\frac{p}{q})^i$

6.8 Satz. Sei X eine HMK mit endlichem Zustandsraum I und $\mathbf{P} = (p_{ij})$.

(a) \mathbf{P} besitzt den Eigenwert $\lambda_1 = 1$. $[\pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij}]$

(b) $\mathbf{1} := (1, 1, \dots, 1)^T$ ist rechter Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$. $[\sum_{j \in I} p_{ij} \cdot 1 = 1]$

(c) Jede stationäre Verteilung $(\mu_i, i \in I)$ ist linker Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$. [s. (a)]

(d) Für alle Eigenwerte λ von \mathbf{P} gilt $|\lambda| \leq 1$.

(e) Sei $T := \{i \in I, i \text{ transient}\}, \mathbf{P}_T := (p_{ij}, i, j \in T) \Rightarrow |\lambda| < 1$ für alle Eigenwerte λ von \mathbf{P}_T .

Beweis. (a) folgt aus (b), (b) und (c) sind trivial.

(d) Sei $\lambda \mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{x}$, d.h. $\lambda x_i = \sum_j p_{ij} x_j \forall i$. Sei $|x_i| = \max_j |x_j| \Rightarrow |\lambda| \leq \sum p_{ij} \frac{|x_j|}{|x_i|} \leq \sum p_{ij} = 1$.

(e) Sei $\lambda \mathbf{x} = \mathbf{P}_T \mathbf{x} \Rightarrow \lambda^n \mathbf{x} = \mathbf{P}_T^{(n)} \mathbf{x} \forall n$. Sei $|x_i| = \max_j |x_j|$ (wie oben).

Zu $i \in T$ ex. $j_0 \notin T$ und m mit $p_{ij_0}^{(m)} > 0 \Rightarrow |\lambda|^m = \sum_{j \in I} p_{ij}^{(m)} \cdot \frac{|x_j|}{|x_i|} \leq \sum_{j \in T} p_{ij}^{(m)} \leq 1 - p_{ij_0}^{(m)} < 1$.