Gerhard Hübner, Universität Hamburg,
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Stochastische Prozesse I

Erneuerungstheorie

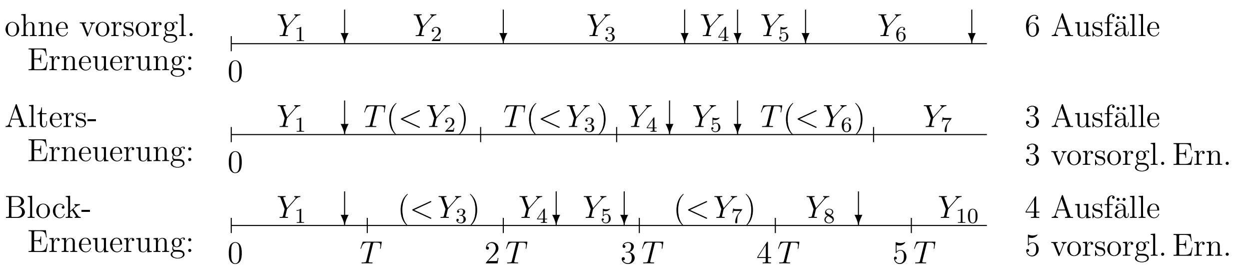
1 Einführung

Anwendung: Ersetzung eines Bauteils (Batterie, Glühbirne, Zündkerzen, Motor)
bei **„Ausfall“** nach zufälliger Lebensdauer.
„Erneuerung“ := Ersetzung durch ein neues (neuwertiges) Teil.
„vorsorgliche/geplante Erneuerung“ := Ersetzung vor Ausfall,
verursacht i.d.R. **geringere** Ausfallkosten, aber **höhere** Erneuerungskosten.

Fragen: Wie oft fällt (im Mittel) das Teil aus? Lohnt sich eine vorsorgliche Erneuerung?
Wann soll gegebenenfalls vorsorglich erneuert werden?

Mögliche **Erneuerungs-Politiken:**
- nur **Ausfall-Erneuerung**,
- **Alters-Erneuerung:** jeweils spätestens bei Alter T,
- **Block-Erneuerung:** jeweils zur Zeit $T,\ 2T,\ 3T,\ \ldots$ und bei Ausfall,
  sinnvoll bei vielen gleichartigen Ausfall-Teilen, z.B. Leuchtstoffröhren in Hörsälen.

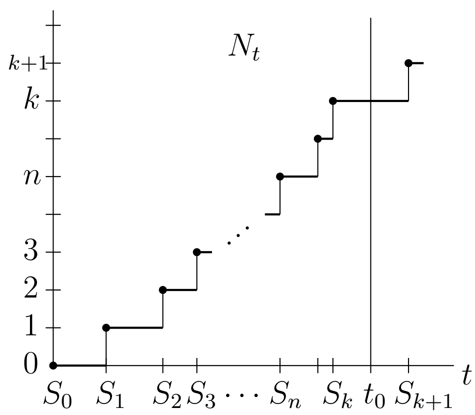
Zeitlicher Ablauf: (schematisch, Y_i seien jeweils die Lebensdauern)



Modell: Gegeben seien zufällige **Lebensdauern** (ZV) $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots,\ \geq 0$,
alle Y_i seien stoch. unabhängig, $Y_2, Y_3, \ldots$ seien identisch verteilt
(das erste Teil muss im Zeitpunkt 0 nicht notwendig neu sein!).
Erneuerungszeitpunkte: $S_n := \sum_{i=1}^{n} Y_i\,,\ n \in \mathbb{N}^*\ S_0 := 0\,.$
Die Folge der Erneuerungszeitpunkte $(S_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$ heißt **Erneuerungsprozess**,
$(N_t := \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{S_n \leq t\}},\ t \in \mathbb{R}_{\geq 0})$ heißt **(zugehöriger) Zählprozess**.

Et 1.1 Folgerung: (a) $\boxed{\{S_n \leq t\} = \{N_t \geq n\}\ \forall\, n,\, t.}$

Diese Formel wird i. F. ständig gebraucht!
(Beweis: s. Def. von N_t – und Abbildung $\rightarrow$)
(b) $N_t \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$ (sonst ist ein $Y_i = \infty$).
(c) Sei $S_\infty := \sum_{i=1}^{\infty} Y_i = \lim_{n\to\infty} S_n\,.$
Dann gilt: $\{S_n \leq t\} \downarrow \{S_\infty \leq t\}$ für $n \rightarrow \infty\,,$
$\{S_\infty \leq t\} = \{N_t = \infty\} \uparrow \{S_\infty < \infty\}$ für $t \rightarrow \infty.$



Interpretation: Bei $S_\infty \leq t$ bzw. $S_\infty < \infty$
besitzt die Folge (S_n) einen Häufungspunkt $(= S_\infty)$.
Daraus folgt $Y_i(\omega) \rightarrow 0\,.$ (Kann das vorkommen?)