

Übungen zu Stochastische Prozesse II

Aufgabenblatt 9:

Abgabe der Hausaufgaben am Mo 21.06.04

Aufgabe P 9.1 (Präsenzaufgabe):

- (a) Modellieren Sie die Telefon-Vermittlung aus Aufg. H 6.1, H 7.1 – mit M möglichen Nutzern, $K (\leq M)$ Leitungen, Ankunfts-[Bedien]rate $\nu [\mu]$ je Nutzer – als einen geschlossenen Migrationsprozess mit zwei Stationen: Station 1 enthält die nicht-telefonierenden möglichen Nutzer, Station 2 die aktiven Nutzer.
- (b) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung.

Aufgabe P 9.2 (Präsenzaufgabe):

In einem $M|M|1 - \cdot |M|1$ -Tandem-System mit Poisson(ν)-Ankunft und Bedienraten μ_1, μ_2 gelte die „LIFO-Bedienregel mit Unterbrechung“, d.h. bei Ankunft eines Kunden wird die bisherige Bedienung unterbrochen. Zeigen Sie:

- (a) Im ersten System ist die Verweilzeit eines Kunden stoch. unabhängig vom Abgangsprozess nach seinem Abgang.
- (b) Die Verweilzeiten eines Kunden in beiden Systemen sind stoch. unabhängig.

Aufgabe H 9.1: (4 + 2 + 2 Punkte)

Gegeben sei ein zyklisches Bediensystem mit J $|M|1$ -Stationen, den Bedienraten $\mu_1, \dots, \mu_J$ und N Kunden. Der Zustandsraum sei $\mathcal{S}_N$. Zeigen Sie:

- (a) Die stationäre Verteilung ist $(\pi(\mathbf{n}))$ mit $\pi(\mathbf{n}) = B_N \mu_1^{-n_1} \cdots \mu_J^{-n_J}$.
Hinweis: Bei den Werten α_j kommt es auf einen Faktor c nicht an.
Zahlenwerte für $J=3$, $\mu_1=1/4$, $\mu_2=1/3$, $\mu_3=1/2$ und $N=1, 2, 3$.
- (b) (b1) Im Gleichgewicht ist die W., dass Station j nicht leer ist,
 $P(N_j(t) > 0) = B_N / (B_{N-1} \mu_j)$. Vergleichen Sie dazu die in $\mathcal{S}_N$ zu berücksichtigenden Zustände mit den Zuständen aus $\mathcal{S}_{N-1}$.
- (b2) Aus (b1) folgt: Die Abgangsrate ist bei allen Stationen B_N / B_{N-1} – unabhängig von j .
- (c) Bestimmen Sie zu $\pi(\mathbf{n})$ (aus (a)) die Randverteilung $\hat{\pi}_{(n_2, \dots, n_J)}^{(N)}$ für die Stationen 2 bis J . Verwenden Sie dazu $\rho_j := \mu_1 / \mu_j$. (Zustandsraum?)
Wie verhält sich das Gesamtsystem für $N \rightarrow \infty$, falls $\mu_j > \mu_1$ für alle $j \geq 2$?
Zeigen Sie, dass dann $\hat{\pi}_{(n_2, \dots, n_J)}^{(N)}$ gegen $\prod_{j=2}^J (1 - \rho_j) \rho_j^{n_j}$ konvergiert.
- Zusatzfrage: Haben Sie eine plausible Erklärung für das Ergebnis von (c)?