

Übungen zu Stochastische Prozesse II

Aufgabenblatt 8:

Abgabe der Hausaufgaben am **Mo 14.06.04**

Aufgabe P 8.1:

Gegeben sei ein Bedienmodell (stetige Zeit) mit **zwei** Bedienern A und B und Bedienraten μ_A, μ_B . Die Ankunftsrate sei ν .

Trifft ein Kunde bei leerem System ein, dann gehe er zu dem Bediener, der die längere Bedienpause hatte (Zustand 0_A für „A hat zuletzt bedient“).

(a) Zeigen Sie, dass dieser Bedienprozess (X_t) die stationäre Verteilung (π_j) besitzt mit

$$\pi_{0_A} = \pi_{0_B} = \pi_2 \mu_A \mu_B / \nu^2, \quad \pi_{1_A} = \pi_2 \mu_B / \nu, \quad \pi_{1_B} = \pi_2 \mu_A / \nu, \\ \pi_n = \pi_2 (\nu / (\mu_a + \mu_b))^{n-2}, \quad n \geq 2. \quad (\pi_2 \text{ nicht explizit})$$

(b) Bestimmen Sie daraus die Übergangsraten q'_{jk} für die Zeitumkehrung $(X_{\tau-t})$.

(c) Ist (X_t) dynamisch reversibel?

Aufgabe H 8.1:

Zeigen Sie – als Fortsetzung zu Aufgabe H 7.2 –:

Wenn das Tandem-System $M|M|1|\infty - \cdot|M|1|\infty$ im Gleichgewicht ist, dann ist auch das **zweite** System im Gleichgewicht,

d.h. die 2. Randverteilung der (Gesamt-)Gleichgewichtsverteilung erfüllt die Gleichgewichtsbedingung für das zweite System (bei Ankunftsrate ν).

Benutzen Sie dazu das Schnittprinzip, das Ergebnis von H 7.2 (c) und die Folgerung aus der Vorlesung, dass $N_1(t_0), N_2(t_0)$ stoch. unabhängig sind.

Geben Sie jeweils kurze Begründungen.

Aufgabe H 8.2:

Wenden Sie auf das Tandem-System $M|M|1|\infty - \cdot|M|1|\infty$ soweit möglich die folgenden Sätze an, um jeweils die stationäre Verteilung zu bestimmen.

(a) Theorem 1.2 (Reversibilität),

(b) Theorem 1.13 (Zeitumkehrung),

(c) Theorem 1.14 (dynamische Reversibilität),

bei (b) und (c) mit der Vermutung, dass eine Produkt-Verteilung vorliegt.