

Übungen zu Stochastische Prozesse II

Aufgabenblatt 6: Abgabe der Hausaufgaben am **Mo 24.05.04**

Aufgabe P 6.1 (Präsenzaufgabe):

Gegeben sei eine HMKS (X_t) mit $\mathcal{S} = \{0, 1\}$ und Übergangsraten $q_{01} = q_{10} = \alpha$. Welche Eigenschaften hat die Folge der Zustandswechsel-Zeitpunkte?

Falls (X_t) stationär ist (welche Verteilung?), ist es dann auch reversibel?

Aufgabe P 6.2 (Präsenzaufgabe):

- (a) Zeichnen Sie den Übergangs-Graph zu einer HMKS mit Zustandsraum $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$ und $q_{12} = q_{21} = \nu$, $q_{13} = q_{23} = \mu - \nu$, $q_{31} = q_{32} = \mu/2$.
- (b) Welche Verteilungen besitzen die Verweilzeiten in den Zuständen 1, 2, 3?
- (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei Start in Zustand 1 mit genau k Übergängen zum ersten Mal nach Zustand 3 zu kommen?
- (d) Wenn die Zustände 1 und 2 zu einem Zustand 0 vereinigt werden, was ergibt sich dann für die Übergangsraten und die Verweilzeiten?
- (e) Berechnen Sie in beiden Fällen die stationäre Verteilung.

Zusatz: Zeigen Sie mit (b)-(d), dass die Summe einer $\text{Geo}^+(1 - \nu/\mu)$ -verteilten Zahl Z von stochastisch unabhängigen (auch von Z) und $\text{Exp}(\mu)$ -verteilten Zufallsvariablen Y_i , $i = 1, 2, \dots$ eine $\text{Exp}(\mu - \nu)$ -Verteilung besitzt.

Aufgabe H 6.1:

Für eine Telefon-Vermittlung gebe es genau M mögliche Nutzer und K Leitungen (keine Warteplätze). Die Ankunftsrate für jeden Nutzer sei ν , die Gesprächsdauern seien $\text{Exp}(\mu)$ -verteilt - alles stoch. unabhängig.

- (a) Modellieren Sie das System als (homogene) Markov-Kette mit stetiger Zeit.
- (b) Bestimmen Sie die zugehörige stationäre Verteilung (π_0 nicht explizit).
- (c) Welche Verteilung ist dies bei $K = M$?

Aufgabe H 6.2:

Für eine Telefon-Auskunft gebe es zwei Auskunftstellen und keine Warteplätze. Modellieren Sie dieses System als Markov-Bedienmodell in diskreter Zeit mit folgenden Übergangs-Wahrscheinlichkeiten:

$$p_{01} = 0.4, p_{10} = 0.3, p_{02} = 0.2, p_{20} = 0.2, p_{12} = 0.3, p_{21} = 0.2.$$

- (a) Bestimmen Sie die/eine stationäre Verteilung.
- (b) Ist das System (im Gleichgewicht) reversibel?
- (c) Für welchen Wert von p_{20} (sonst wie oben) liegt Reversibilität vor?
- (d) Wie lautet dann die stationäre Verteilung?