Gerhard Hübner, Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Übungen zu Stochastische Prozesse II

Aufgabenblatt 4: Abgabe der Hausaufgaben am **Mo 10. 05. 04**

Aufgabe P 4.1 (Präsenzaufgabe):

(a) Stellen Sie für $G=F$ im arithmetischen Fall $Z(n) := P(V_n=k)$ dar durch eine Erneuerungsgleichung $Z(n) = z(n) + f * Z(n)$ mit (f_n) als Z-Dichte zur Verteilungsfunktion F.

(b) Zeigen Sie mit (a) $\lim_{n\to\infty} P(V_n=k) = g_F(k) := \frac{1}{\mu}[1 - F(k-1)]$ $(k \geq 0)$.

Aufgabe P 4.2 (Präsenzaufgabe):

Für ein Maß η auf $\mathbb{R}$ mit maßdefinierender Funktion H sei x ein Trägerpunkt von η bzw. H, wenn $H(x+\varepsilon) - H(x-\varepsilon) > 0$ gilt für alle $\varepsilon > 0$.
Der Träger (= Menge aller Trägerpunkte) von η bzw. H sei $\underline{Tr(H)}$.

(a) Zeigen Sie: Mit $a \in Tr(H_1)$ und $b \in Tr(H_2)$ gilt auch $a+b \in Tr(H_1 * H_2)$.

(b) Für eine Verteilungsfunktion F auf $[0, \infty)$ sei $M := \bigcup_{n=0}^{\infty} Tr(F^{n*})$.
Zeigen Sie, dass $M \subset Tr(\widetilde{U})$ und dass mit $a, a+h \in M$ $(h > 0)$ für $n \geq 1$, $0 \leq m \leq n$ auch $na+mh \in M$ gilt. (Skizze!)

Aufgabe H 4.1:

Es sei $(X_t,\ t \geq 0)$ ein regenerativer Prozess mit abzählbarem Zustandsraum I, nicht-arithmetischem P^{S_1} und $\mu := ES_1 < \infty$.

(a) Stellen Sie zu $k \in I$ eine Erneuerungsgleichung für $Z_k(t) := P(X_t=k)$ auf.

(b) Zeigen Sie damit $\pi_k := \lim_{t\to\infty} P(X_t=k) = \frac{1}{\mu} E \int_0^\infty 1_{\{X_t=k, S_1>t\}} dt$.
(Setzen Sie dabei voraus, dass vorkommende Integranden dRi sind.

(c) Welchen Wert hat dann $\overline{\pi}_k := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T P(X_t=k)\, dt$?

(d) Interpretieren Sie π_k, $\overline{\pi}_k$, und die rechte Seite in (b).

Aufgabe H 4.2:

Zeigen Sie unter Verwendung der Bezeichnungen und Ergebnisse aus Aufg. P 4.2 die folgenden Aussagen:

(a) Für $h < \delta$, $nh \geq a$ gibt es in $[na, \infty) \cap M$ keine Lückenlängen $> h$ und für $t > T := na$ gilt: $U(t+\delta) - U(t) > 0$.

(b) Falls $h_0 := \inf\{|b-a|,\ a, b \in M\} > 0$, dann existieren a und $a+h$ in M mit $h_0 \leq h < 2h_0$ und es gilt $[na, na+nh] \cap M = \{na+mh,\ m=0, 1, \ldots, n\}$.

(c) Mit a, h aus (b) und $nh \geq a$ folgt $a \in h \cdot \mathbb{N}_0$. (Test mit $(n+1)\,a$!)

(d) Für $c \in Tr(F)$ und a, h aus (b) existieren k und n mit $c+ka \in [na, na+nh]$, und es gilt $c \in h \cdot \mathbb{N}_0$. (Damit ist F arithmetisch.)