

Übungen zu Stochastische Prozesse II

Aufgabenblatt 1: Abgabe der Hausaufgaben: **Do 15. 04. 04!** (12:05 Uhr)

Aufgabe P 1.1 (Präsenzaufgabe):

- (a) Bestimmen Sie zu Beispiel B2 ($P^{Y_1} = P^{Y_2} = B(p)$) die W-Maße P^{S_n} und P^{N_t} .
(b) Zeigen sie $U(t) = \frac{1-p}{p} + [t] \cdot \frac{1}{p}$. Skizze für $p = 1/6$?

Aufgabe P 1.2 (Präsenzaufgabe):

- Bestimmen Sie die Faltungen (a) der Z-Dichten von $B(n, p)$ und $B(m, p)$,
(b) der Verteilungsfunktionen zweier $\text{Exp}(\alpha)$ -Verteilungen.

Aufgabe P 1.3 (Präsenzaufgabe):

Zeigen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformierten (LT)
den Zentralen Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace (für Folgen $X_1, X_2, \dots$
von stochastisch unabhängigen Bernoulli(p)-Versuchen):

Die Standardisierung $Z_n := (S_n - ES_n) / \sqrt{\text{Var} S_n}$ der Summe $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$
ist näherungsweise (und für $n \rightarrow \infty$ mit zunehmender Genauigkeit)
 $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt.

Anleitung: (1) Bestimmen Sie die LT $\psi_{X_1-p}(t)$ von $X_1 - p$.

(2) Entwickeln Sie $\psi_{X_1-p}(t)$ in eine Potenzreihe bis t^2 , dann $+ t^3(\dots)$.

(3) Geben Sie mit dieser Darstellung $\psi_{S_n-np}(t)$ an.

(4) Bestimmen Sie daraus ψ_{Z_n} (ohne die Struktur zu ändern).

(5) Lassen Sie jetzt n gegen ∞ gehen (vgl. Hinweis zu H 1.1 (d)).

Aufgabe H 1.1: Berechnen Sie die Laplace-Transformierten der folgenden Verteilungen. Machen Sie dabei Gebrauch von Et 2.1 (a)+(b) und Beispiel 2.

- (a) Binomial-Verteilung $B(n, p)$, sowohl direkt, als auch über Faltung,
(b) Poisson-Verteilung $\pi(\alpha)$, ($\alpha > 0$).
(c) Überprüfen Sie die Faltungseigenschaft $\pi(\alpha) * \pi(\beta) = \pi(\alpha + \beta)$.
(d) Zeigen Sie mit (a) und (b) $B(n, p_n) \rightarrow \pi(\alpha)$ für $n \rightarrow \infty$, $n \cdot p_n \rightarrow \alpha$.

Hinweis: $(1 + c_n/n)^n \rightarrow e^c$ für $n \rightarrow \infty$ und $c_n \rightarrow c$.

Aufgabe H 1.2: Berechnen Sie die Laplace-Transformierten

- (a) der geometrischen Verteilungen $\text{Geo}^0(p)$ und $\text{Geo}^+(p)$,
(b) der negativen Binomial-Verteilungen $\text{Nb}^0(r, p)$ und $\text{Nb}^+(r, p)$,
(c) der Standard-Normal-Verteilung $\mathcal{N}(0, 1)$ (Ergebnis: $\psi_X(t) = e^{t^2/2}$),
(d) der (allgemeinen) Normal-Verteilung $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.
(e) Überprüfen Sie die Faltungseigenschaft

$$\mathcal{N}(a, \sigma^2) * \mathcal{N}(b, \tau^2) = \mathcal{N}(a + b, \sigma^2 + \tau^2).$$