Stochastische Prozesse II

Noch 3.2 Zusammenbau quasi-reversibler Bedienstationen zu einem Netz

J Stationen, quasi-reversibel mit $(\pi_j(x_j))$, $(q_j(x_j, x_j'))$, Klassen $c = (i, s)$,
wobei i = Kd.-Typ und s = Stufe der vorgegebenen Route für Typ i,
$\alpha_j(i,s) :=$ Ankunftrate von Kd. der Klasse (i,s) [entspr. $\alpha(c)$ s.o.].

Ankunft (von „außen") von Kd. der Klasse $(i,1)$ in Station $k = r(i,1)$ wie bei isol. Station,
Ü-Rate $q_k(x_k, x_k')$ mit $x_k' \in \mathcal{S}_k(i,1,x_k)$, $\sum_{x_k' \in \mathcal{S}_k(i,1,x_k)} q_k(x_k, x_k') = \alpha_k(i,1)$.

Abgang (nach „außen") von Kd. der Klasse $(i, S(i))$ von Station $j = r(i, S(i))$
aus Zustand $x_j' \in \mathcal{S}_j(i, S(i), x_j)$ mit Ü-Rate $q_j(x_j', x_j)$

Übergang von Station $j = r(i,s)$ nach $k = r(i, s+1)$ $(1 \le s < S(i))$: (zusammensetzen)
Abgang aus Station j mit Rate $q_j(x_j', x_j)$, $x_j' \in \mathcal{S}_j(i, s, x_j)$, (Stat. j verbleibt im Zustand x_j)
Ankunft in Station k mit bedingter Aufteilungs-W. (bedingt unter Ank. eines $(i,s+1)$-Kd. i. Zust. x_k)

$$\frac{q_k(x_k, x_k')}{\alpha_k(i, s+1)} \text{ mit } x_k' \in \mathcal{S}_k(i, s+1, x_k), \quad \alpha_k(i, s+1) = \sum_{x_k' \in \mathcal{S}_k(\dots)} q_k(x_k, x_k'),$$

$\Rightarrow$ Ü-Rate $q_j(x_j', x_j) \dfrac{q_k(x_k, x_k')}{\alpha_k(i, s+1)}$, x_j', x_k', $\alpha_k(i, s+1)$ s.o.

3.3 Gamma- und andere Bedienzeit-Verteilungen

Wir betrachten (zunächst) eine Station.
Kunden der Klasse c kommen als Poisson(ν_c)-Prozess an [Phase 1 .... Phase m_c]
und erfordern eine $\Gamma_{1/d_c, m_c}$-verteilte Bedienzeit: $\Gamma_{1/d_c, m_c} = Exp(1/d_c) * \dots * Exp(1/d_c)$ (m_c-mal)
Im Zustand $\mathbf{c} = ((c_1,u_1),(c_2,u_2),\dots,(c_n,u_n))$ wird auch die aktuelle Phase u_ℓ registriert.
Ist eine ($Exp(1/d_c)$-verteilte) Phase abgelaufen (mit Rate $1/d_c$), so wird u_ℓ zu $u_{\ell+1}$. [j weggelassen]
Mit Zeitumkehrung bestimmt man die stat. Vert. $\pi(\mathbf{c}) = b \dfrac{\nu_{c_1} d_{c_1} \cdots \nu_{c_n} d_{c_n}}{\varphi(1) \cdots \varphi(n)}$ (falls $\Sigma \dots < \infty$).

Wegen der Phasen u_ℓ u. d. Raten $1/d_c$ muss $\delta(\ell,n) = \gamma(\ell,n)$ sein für alle (ℓ,n). (Hier o. Beweis.)
Solche Stationen nennt man symmetrisch. Die Station ist dann quasi-reversibel.
Man kann also nur solche Stationen mit Γ.-Bedienzeit in quasi-rev. Netze einbauen.
Symmetrische Stationen sind: LCFS m. Unterbr. $\delta(1,n) = \gamma(1,n) = 1$ (auch bei K Bedienern),
auch $M/M/\infty$ (FCFS oder LCFS ist gleich), d.h. bei bel. vielen Bedienern.
Nicht symmetrisch ist insbesondere $M/M/1/\infty$ FCFS (!).

Bemerkung 1. Man kann analog Mischungen von Γ-Verteilungen modellieren, $\sum_{k=1}^{K} p_{c,k} \cdot \Gamma_{1/d_{c,k}, m_{c,k}}$, durch Unterteilung der Kundenklassen.
Mit solchen Mischungen kann man jede Verteilung auf $\mathbb{R}_+$ approximieren.

2. Man kann allg. Verteilungen auch erzeugen, indem die jeweilige Bedienrate bzw. das Bedien-Ende (Zust. 0) durch eine absorbierende Markovkette „ausgewürfelt" wird.