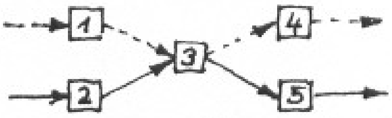
Gerhard Hübner, Universität Hamburg,
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Stochastische Prozesse II

3.1 Stochastische Netzwerke: Allgemeine Kunden-Routen

Beispiel eines Bedienungs-Netzwerks, das nicht durch einen Migrationsprozess dargestellt werden kann: Fertigungs-Ablauf



Kunden = Werkstücke, Bedien-Stationen = Maschinen, Verzweigung abh. von Vorgeschichte.

Ausweg: Kunden werden in Typen eingeteilt: Typ 1: Weg 1-3-4, Typ 2: Weg 2-3-5.

$\boxed{\text{Kunden-Typen}}$: Modell-Annahmen : I Kunden-Typen, J Bedien-Stationen

Die (vorgeschriebene) Route der Kd. v. Typ i sei $r(i,1), r(i,2), \dots, r(i,S(i))$ mit $S(i)$ Stationen. Die gleiche Station j kann mehrmals i.d. Route vorkommen, aber nicht aufeinander folgend [o.E., sonst wird fiktive Station eingeschoben]

Ankunft: Kd. v. Typ i kommen als Poisson-Prozess mit Rate $\nu(i)$ in $r(i,1)$ an. Die Ankunfts-Prozesse verschiedener Kd-Typen seien stoch. unabhängig.

Bemerkung: I kann auch abz. unendl. sein, aber es muß $\sum_I \nu(i) < \infty$ gelten.
Falls die Route stochastisch sein soll: ordne jedem mögl. Weg einen Typ zu.
Anwendung z.B. auf „Zufällige Reihenfolge"; auf Migrationsprozesse möglich (umständl.)

$\boxed{\text{Bedien-Station}}$ Modell-Annahmen:

Den Kunden in Station j werden Positionen $1, 2, \dots, n_j$ zugeordnet, falls n_j die Anzahl der Kd. in Station j ist. Dabei wird folgendes angenommen:

(1) Jeder Kunde benötigt den selben Bedienaufwand (unabh. v. Typ).

(2) Die momentane Bedien-Rate in Station j sei $\phi_j(n_j)$ – insgesamt.

(3) Davon erhält der Kd. in Pos. ℓ den Anteil $\gamma_j(\ell, n_j)$ mit $\sum_{\ell=1}^{n_j} \gamma_j(\ell, n_j) = 1$
Wenn der Kd. in Pos. ℓ die Station verlässt, rücken Pos. $\ell+1, \dots, n_j$ auf $\ell, \dots, n_j - 1$.

(4) Wenn ein Kd. in Station j ankommt, wird er Pos. ℓ zugeteilt mit W $\delta_j(\ell, n_j+1)$.
mit $\sum_{\ell=1}^{n_j+1} \delta_j(\ell, n_j+1) = 1$. Dabei rücken Pos. $\ell, \dots, n_j$ nach $\ell+1, \dots, n_j+1$.

(5) $\phi_j(n_j) > 0$ falls $n_j > 0$. Alle Bedien-Forderungen (s.(1)) sind st. unabhängig.

Folgerung: Der Kd. in Pos. ℓ verlässt Station j mit Rate $\phi_j(n_j)\gamma_j(\ell, n_j)$ (unabh. vom Typ!)

Beispiel: Modell einer $\cdot/M/K/\infty$ – FCFS – Station mit Bed. Rate λ_j je Bediener:

$$\phi_j(n) = \mu_j \cdot \min(K, n)$$

$$\delta_j(\ell, n) = 1 \quad \text{für } \ell = n \quad \text{(neuer Kd. zählt mit!)}$$

$$\gamma_j(\ell, n) = \frac{1}{n} \quad \text{für } \ell = 1, \dots, n, \quad \text{falls } n \le K \qquad \text{sonst } = 0$$
$$= \frac{1}{K} \quad \text{für } \ell = 1, \dots, K, \quad \text{falls } n \ge K$$

Bemerkung: Bei LCFS wäre $\delta_j(\ell, n) = 1$ für $\ell = 1$.

Nicht modellierbar: Prioritäts-Regeln (abh. vom Typ), Bedienraten typ-abh., Abhängigkeit von früherem Bedienzeiten.

Stochastische Prozesse II

3.1 F Stochastische Netzwerke: Allgemeine Kunden-Routen (Forts.)

$\boxed{\text{Zustand des Systems}}$ – bisher: $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_J)$, $n_j \geq 0$, jetzt: $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_J)$, $\mathbf{c}_j \in$?

$t_j(\ell)$ = Typ des Kunden in Station j in Position ℓ (kurz: des Kd. (j,ℓ))

$s_j(\ell)$ = Stufe = Nr. der Station j im Routenplan des Kd. (j,ℓ).

$\mathbf{c}_j = \big((t_j(1), s_j(1)), (t_j(2), s_j(2)), \ldots, (t_j(n_j), s_j(n_j))\big)$ = Zustand d. Station j, $c_j(\ell) := (t_j(\ell), s_j(\ell))$ = Klasse d. Kd. ℓ

$\mathbf{C} = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_J)$ = Zustand des Systems, $\mathbf{C}(t)$ = zugehöriger stoch. Prozess.

Beispiel: $J = 5$ Stationen, $I = 4$ Kunden-Typen.

Routen-Plan (feste Liste)

Typ i	Ank.r. $\nu(i)$	Route $r(i,1), \ldots, r(i, S(i))$
1	2	1, 2, 4, 2, 3
2	1	3, 4, 1, 4
3	3	3, 4, 5, 1, 2, 5
4	1	5, 2, 4, 2, 3

Zustand (z.B.) (Moment-Aufnahme)

Station j	$(t_j(1), s_j(1)), \ldots, (t_j(n_j), s_j(n_j))$
1	(3,4) (1,1) (2,3) (2,3)
2	(4,2) (3,5)
3	(2,1) (4,5) (1,5) (3,1) (1,5)
4	(3,2) (2,4) (2,2)
5	(3,3) (4,1) (3,6) (3,6)

$\boxed{\text{Übergangsraten}}$ Es gibt wieder 3 Arten wie in Sektion 2.4.

1\. Art: Abgang aus d. System: Kd. (j,ℓ) verlässt d. System, weil j seine letzte Station ist

$\mathbf{C} \to T_{j\ell}.\mathbf{C}$ mit W. $\phi_j(n_j)\gamma_j(\ell, n_j)$, falls $s_j(\ell) = S(t_j(\ell))$, sonst $= 0$.

Es kann $T_{j\ell}.C = T_{jg}.C$ sein: falls (bei $\ell < g$) $c_j(\ell) = \ldots = c_j(g)$, im Beisp.: $j = 5$, $\ell = 3$, $g = 4$.

Also: $q(C, T_{j\ell}.C) = \sum_g q(C, \ell, \cdot, T_{j\ell}.C) := \sum_g \phi_j(n_j)\gamma_j(g, n_j)\, 1_{\{s_j(g) = S(t_j(g))\}}$

über alle g mit $T_{j\ell}.C = T_{jg}.C$

2\. Art: Übergang im System: Kd (j,ℓ) mit $s_j(\ell) \neq S(t_j(\ell))$, $r(t_j(\ell), s_j(\ell)+1) = k$ wird Kd (k,m)

$C \to T_{j\ell m} C$ mit W. $\phi_j(n_j)\gamma_j(\ell, n_j)\delta_k(m, n_k+1) =: q(C, \ell, m, T_{j\ell m} C)$ (mehrdeutig!)

(Beispiel für Mehrdeutigkeit: $(j,\ell,m) = (3, 4, 1/2)$ oder $(1, 3/4, 2/3)$)

Also: $q(C, T_{j\ell m} C) = \sum_g \sum_h q(C, g, h, T_{jgh} C)$ über g, h mit $T_{jgh} C = T_{j\ell m} C$.

3\. Art: Zugang: Kd. v. Typ i wird Kd (k,m) mit $k = r(i,1)$.

$C \to T^{im} C$ mit W. $\nu(i)\delta_k(m, n_k+1) =: q(C, \cdot, m, T^{im} C)$, falls $k = r(i,1)$

(Beispiel für Mehrdeutigkeit: $i=1, k=1, m=2/3$ oder $i=3, k=3, m=4/5$)

Also: $q(C, T^{im} C) = \sum_h q(C, \cdot, h, T^{ih} C)$ über h mit $T^{ih} C = T^{im} C$.

$\boxed{\text{Stationäre Verteilung}}$ Ohne „System" bzw. „Trick": hoffnungslos!

$\alpha_j(i,s) := \nu(i)$, falls $j = r(i,s)$, sonst $= 0$: Ank.rate nach j mit Typ i, State s

$\mathbf{a}_j := \sum_{i=1}^{I} \sum_{s=1}^{S(i)} \alpha_j(i,s)$: erw. Anz. v. Kd., die (im Gleichg.) je Zeiteinh. in Station j ankommen = mittlere Ankunftrate

$b_j^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{a}_j^{\,n}}{\prod_{\ell=1}^{n} \phi_j(\ell)}$ [vgl. $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "a_j"] & 1 \arrow[l, bend left, "\phi_j(1)"] \arrow[r, bend left, "a_j"] & 2 \arrow[l, bend left, "\phi_j(2)"] \arrow[r, bend left] & \cdots \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$ Ank. d. Kd. in Stat. j ist kein Poisson(a_j)-Prozess, dieselbe Gl.gew.Vert.]

Annahme: Alle b_j sind $\neq 0$, d.h.: keine Station läuft über.

Satz 3.1 Die Gleichgew.Vert. des obigen Bedienungs-Netzwerks ist $\pi(C) = \prod_{j=1}^{J} \pi_j(\mathbf{c}_j)$,
wobei $\pi_j(c_j) = b_j \prod_{\ell=1}^{n_j} \alpha_j(t_j(\ell), s_j(\ell))/\phi_j(\ell)$ (stat. Vert. d. Zust. d. Station j)

Satz 3.2. Der umgekehrte Prozeß $\mathbf{C}(-t)$ ist ein Bedienungs-Netzwerk der gleichen Struktur.

Corollar 3.3. Im Gl.gew. sind Abgangsströme Poisson$(\nu(i))$. $C(t_0)$ st.u. von Abgängen vor t_0

Corollar 3.4. Im Gl.gew. Stationen st.u., Vert. $\pi_j(c_j)$, Anz.d.Kd. hat Vert. $b_j \cdot a_j^{n_j} / \prod_1^{n_j} \phi_j(\ell) =: \overline{\pi}_j(n_j)$

Corollar 3.5. Ein Kd. v. Typ i, Stufe s, findet Station j in Gleichgew.Vert. $\pi_j(c_j)$ bzw. $\overline{\pi}_j(n_j)$.

Stochastische Prozesse II

3.2 Offene Netzwerke mit quasi-reversiblen Bedienstationen

Vorbetrachtung: Jede Bedienstation sei eine "black box" mit folgenden Bedingungen:

1. Es gibt einen Eingangsstrom und einen Ausgangsstrom.
2. Jeder Kunde, der die Station betritt, verlässt sie wieder (aber nicht sofort)
3. Die Kd. kommen einzeln an und gehen einzeln wieder ab.
4. Jeder Kunde hat eine Klasse c, die sich nicht ändert.
5. Der „Zustand" der Station wird durch e. Markov-Prozess (HMKS) $X(t)$ beschrieben.
6. $X(t)$ enthält mindestens die Anzahlen der Kd. der einzelnen Klassen (daraus lässt sich der Ankunfts- und Abgangs-Prozess jeder Klasse rekonstruieren).

Definition: Eine Bedien-Station ist quasi-reversibel, wenn gilt:

(0) Der Zustand $X(t)$ ist ein irreduz. Markov-Prozess (HMKS), es ex. e. stat. Vert.

(1) $X(t_0)$ ist i.Gl.gew. st.u. vom Ankunfts-Prozess von Kd. d. Klasse c nach t_0

(2) ——— " ——— Abgangs-Prozess —— " —— vor t_0.

Satz 3.6: In einer quasi-reversiblen Bedien-Station gilt im Gleichgewicht:

(i) die Ankunfts-Prozesse d. Kd. d. Klasse c, $c \in \mathcal{C}$, sind st. unabh. Poisson-Prozesse

(ii) die Abgangs-Prozesse ——— " ———.

Beweis: (i) Sei $\mathcal{S}(c,x)$ die Menge d. mögl. Zustände, wenn im Zustand x ein Kd. d. Klasse c ankommt. Also gilt:

$$P(\underbrace{\text{ein Kd. d. Klasse } c \text{ kommt in } (t_0, t_0+h]}_{A} \mid X(t_0)=x) = \sum_{x' \in \mathcal{S}(c,x)} q(x,x') \cdot h + o(h)$$

Da $X(t)$ quasi-reversibel, ist die r. S. unabh. von x, also $\alpha(c) \cdot h + o(h)$

Wegen der Markov-Eigenschaft ist das Ereignis A auch st.u. von $X(t)$, $t \le t_0$.
also auch von den früheren Ankünften der Kd. d. Klasse c
und von den ——— " ——— der Kd. aller anderen Klassen.

$\Rightarrow$ Ankünfte v. Kd. d. Klasse c bilden e. Poisson-Prozess mit Rate $\alpha(c)$ und die Ankunfts-Prozesse der Kd. versch. Klassen sind st. unabh. (!)

(ii) Betrachte den zeitumgekehrten Prozess $X(-t)$:
$X(-t)$ ist auch quasi-reversibel (da sich die Ankünfte / Abgänge von Kd. d. Klasse c entsprechen)

Hier ohne Beweis (s. Kelly):

Satz 3.7: In einem „offenen Netzwerk mit quasi-reversiblen Stationen" (s.u.) gilt i.Gl.gew.:

(i) Zu festen Zeitpunkten sind die Stationen st.u.

(ii) Für jede Station j ist die Verteilung (j-te Randvert.) und die Verteilung, die ein („typischer") ank. Kd. der Klasse c antrifft, dieselbe wie bei „isolierter Station" mit Poisson($\alpha_j(c)$)-Ank.-Prozessen.

(iii) Der zeitumgekehrte Prozess hat die gleiche Struktur, d.h. off. Netz mit quasi-rev. Stationen.

(iv) Das Gesamtsystem ist quasi-reversibel, also gilt Satz 3.6.