Stochastische Prozesse II

2 Stochastische Netzwerke: Migrationsprozesse

2.4 Offene Migrationsprozesse: Jackson-Netze

Im Vergleich zu 2.3 gibt es (1) bel. viele Kd. (2) Zugänge und Abgänge von „außen".

Zur Vereinfachung: „außen" = Station 0 $\Rightarrow$ Bezeichnungen aus 2.3 mit folg. Änd.:

$n_0 = \infty$, $\varphi_0(\infty) = \varphi_0$, $\mathcal{S} = \{\underline{n} = (n_1, \dots, n_J), n_j \geq 0\}$ (keine feste Kd-Zahl „im System").

$\Rightarrow$ $\varphi_0 \lambda_{0k}$ ist Ank.rate <u>von</u> „außen" <u>nach</u> Station k (bei Kelly ν_k),

λ_{j0} ist Abgangs-<u>W.</u> <u>nach</u> „außen" <u>von</u> Station j (bei Kelly μ_j).

Wie bisher: <u>Übergänge</u>: $\underline{n} \mapsto T_{jk}\underline{n}$: $n_j \mapsto n_j - 1$, $n_k \mapsto n_k + 1$, $j, k \in I_0 := \{0, 1, \dots, J\}$,

<u>Ü-Raten</u>: $q_{\underline{n}, T_{jk}\underline{n}} = \varphi_j(n_j) \cdot \lambda_{jk}$ $(\lambda_{jj} = 0, \sum_k \lambda_{jk} = 1)$, $j, k \in I_0$

<u>Annahmen</u>: $\varphi_j(n) > 0$ für $n > 0$, $\underline{I_0}$ mit Ü-W. λ_{jk} ist irreduzibel.

<u>eind. stat. Vert.</u> auf I_0 mit $\alpha_j > 0$ u. $\alpha_j \underbrace{\sum_{k=0}^{J} \lambda_{jk}}_{(=1)} = \sum_{k=0}^{J} \alpha_k \lambda_{kj}$, $j, k \in I_0$ (2.9).

Statt $\sum \alpha_j = 1$ setzen wir $\alpha_0 = \varphi_0$ $\Rightarrow$ (2.9) wie bei Kelly mit $\nu_k = \varphi_0 \lambda_{0k}$, $\mu_j = \lambda_{j0}$ (s.o.)

Dann ist α_j die Gesamt-Ankunfts/Abgangs-Rate an Station j. (Rate = langfrist. Ø)

(Bem.: 1 Zeile in (2.9) ist überflüssig wg. hom. Gl.-System, bei Kelly steht „$j=0$" erst S. 50, Z. 14)

<u>Theorem 2.4.</u> Vorauss. wie oben. Dann ex. stat. Vert. $(\pi_{\underline{n}})$ für $N(t)$, falls $b_j^{-1} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_j^n}{\varphi_j(1) \cdots \varphi_j(n)} < \infty$: $(1 \leq j \leq J)$

$$\pi_{\underline{n}} = \prod_{j=1}^{J} \pi_j(n_j) = \prod_{j=1}^{J} b_j \frac{\alpha_j^{n_j}}{\varphi_j(1) \cdots \varphi_j(n_j)} \qquad (2.10)$$

(Bew. wie Th. 2.3).

<u>Folgerung</u>: Falls $N(t)$ stat., dann ist $N_1(t_0), \dots, N_J(t_0)$ st.u. (weil (2.10) e. Produkt-Dichte ist).

<u>Folgerung:</u> $N(t)$ ist reversibel, falls stationär und $\alpha_j \lambda_{jk} = \alpha_k \lambda_{kj}$.

<u>Theorem 2.5:</u> Wenn $N(t)$ ein stat. Migrations-Prozess ist, dann auch $N(-t)$.

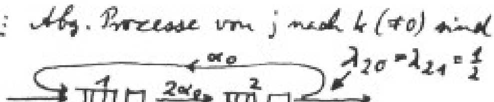
Beweis: Ü-Raten zu $N(-t)$ mit Th. 1.12 : $q'_{\underline{n}, T_{jk}\underline{n}} = \varphi_j(n_j) \lambda'_{jk}$ mit $\lambda'_{jk} = \frac{\alpha_k \lambda_{kj}}{\alpha_j}$, $j \in I_0$.

<u>Folgerung 2.6:</u> $N(t)$ stat. Migr. Proz. $\Rightarrow$ die Abg.prozesse von j <u>nach 0</u> sind st.u. $PP(\alpha_j \lambda_{j0})$ <u>und</u> $N(t_0)$ ist st.u. von diesen Abgangsprozessen vor t_0.

Beweis mit Zeitumkehrung und Th. 2.5. (Ank. Prozesse von 0 nach j sind st.u. PP)

<u>Bemerkung</u>: Abg. Prozesse von j nach k $(\neq 0)$ sind i.allg. <u>keine</u> Poisson-Prozesse.

<u>Beispiel</u>:



Abg. Proz. von 2 ist kein P.P., aber Abg. Proz. von 2 <u>nach 0</u> (s. Übg.)

<u>Folgerung 2.7:</u> $N(t)$ stat. $\Rightarrow$ Verweilzeit in $M|M|s|\infty$-Station j hat die selbe Verteilung wie bei e. isolierten $M|M|s|\infty$-Station mit Ank.-Rate α_j, <u>und</u> ein abgehender Kd. hinterläßt die Station in stat. Vert. $(\pi_j(n_j))$, ein ank. Kd. findet sie in dieser Vert..

Beweis: Erst (b): W.-Rate (Kd. verlässt j, hinterlässt n_j) $= \pi_j(n_j+1)\varphi_j(n_j+1)$.

$\Rightarrow$ bed. $W(\dots n_j \mid \text{Abg.}) = \pi_j(n_j+1)\varphi_j(n_j+1) / (\sum_0^\infty \dots) = \pi_j(n_j)$ (nachrechnen!) $\Rightarrow$ (c), $\Rightarrow$ (a).

<u>Bemerkung:</u> Modell auch mit $J = \infty$, falls $B := b_1 b_2 \cdots > 0$ $(b_j < 1)$.

Im Gl.gew. ist dann die Gesamt-Kundenzahl endlich. (Übg.)