Stochastische Prozesse II

2 Stochastische Netzwerke: Migrationsprozesse

2.1 Abgangsprozesse

<u>Theorem 2.1</u> (a) Der Abgangs-(Zähl-)Prozess eines $M/M/1/\infty$-Bediensystems ist – im Gleichgewicht – ein Poisson-Prozess.
(b) Die Kundenzahl X_{t_0} (z. Zt. t_0) ist st. u. vom Abgangsprozess <u>bis</u> t_0.

<u>Beweis:</u> (a) Der Ankunfts-(Zähl-)Prozess ist ein Poisson(ν)-Prozess.
(Entweder „nach Konstruktion" oder aus den Ü-Raten.)
Ist (X_t) stationär, dann auch reversibel. $\Rightarrow (X_{-t})$ verhält sich wie (X_t).
$\Rightarrow$ Der Ankunfts-Prozess von (X_{-t}) ist ein Poisson(ν)-Prozess.
$\Rightarrow$ Dieser ↑ ist der Abgangsprozess von (X_t).
(b) Der Ankunftsprozess von (X_t) <u>nach</u> t_0 ist von X_{t_0} st. u.! Mit Zeit-Umkehrung:
$\Rightarrow$ Der Ankunftsprozess von (X_{-t}) <u>nach</u> $-t_0$ ist von X_{-t_0} st. u.
$\Rightarrow$ Der Abgangsprozess von (X_t) <u>vor</u> t_0 ist von X_{t_0} st. u.

<u>Folgerung:</u> Ein abgehender Kunde (eines stat. $M/M/1$-Prozesses) hinterlässt den Prozess „im Gleichgewicht", d.h. $P(X_{t_0+} = j \mid 1 \text{ Abgang z. Zt. } t_0) = \pi_j \quad (j \in \mathbb{N}_0)$.
Beweis: Mit Zeitumkehrung oder analog zum Beweis für Ankünfte:

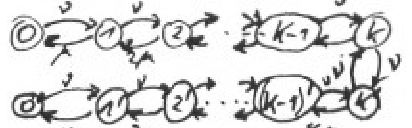
$$P(X_{t_0+h} = j \mid 1 \text{ Abg. in } [t_0, t_0+h)) = \frac{\pi_{j+1} \cdot (\mu h + o(h))}{\left(\sum_{j=0}^{\infty} \pi_{j+1}\right)(\mu h + o(h))} = \frac{\pi_j \cdot \nu/\mu}{1 - \pi_0} = \pi_j \ .$$

<u>Bemerkung</u> 1. Der abgehende Kd. ist „aus den Augen – aus dem Sinn".
2. Die Abgangsrate ist ν (!): $\pi_0 \cdot 0 + (1-\pi_0) \cdot \mu = \frac{\nu}{\mu} \cdot \mu = \nu$.
3. Der Abgangsprozess enthält keine Inform. über μ.

<u>Verallgemeinerung von Th. 2.1</u> auf Bedienprozesse mit:
Poisson-Ankunft, jede Ankunft ändert d. Zustand, umgekehrter Übergang entspr. e. Abgang, Prozess ist reversibel.

<u>Beispiele:</u> $\boxed{1.}$ $M/M/s/\infty$ $\boxed{2.}$ 2 Bediener mit μ_A, μ_B und Zuteilung $\frac{1}{2}/\frac{1}{2}$.

$\boxed{3.}$ Telefonzentrale mit K Leitungen: Voraussetzung 2 ?
Ausweg: Flip-Flop-Variable V_t $V_t = 0$:
<u>Stat. Vert.</u> $\pi_{j,0} = \pi_{j,1} = \frac{1}{2}\pi_j$ $V_t = 1$:



<u>Bemerkung:</u> Bei vollem System ankommende Kd. zählen als Ankunft <u>und</u> Abgang. Der Ankunftsprozess in das System hinein ist <u>kein</u> Poisson-Prozess.

<u>Beispiel</u> $\boxed{4.}$: 2 Bediener mit μ_A, μ_B aber Zuteilung zum „zuerst freien Bediener": Der Prozess ist nicht reversibel, aber dynamisch reversibel.
$\Rightarrow$ Der Umkehrprozess hat Poisson-Ankunft $\Rightarrow$ d. Prozess hat Poisson-Abgang.

Gerhard Hübner, Universität Hamburg,
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Stochastische Prozesse II

2 Stochastische Netzwerke: Migrationsprozesse

2.2 Eine Serie einfacher Bedienstationen

Es werden J M/M/1-Bediensysteme „in Reihe" hintereinander angeordnet.

$\xrightarrow{PP(\nu)}$ Stat. 1 $\square \longrightarrow$ Stat. 2 $\square \longrightarrow \cdots \longrightarrow$ Stat. J $\square \longrightarrow$

Ankunft an Stat. 1: $PP(\nu)$
Bedienraten $\mu_1, \mu_2, \dots$
alle $\mu_j > \nu$.

<u>Lemma:</u> Wenn das Gesamt-System im Gleichgew. ist, dann auch Station 1.
Dazu: $S = \{n = (n_1, \dots, n_J)\}$ (Kd.-zahlen), Ü-Raten $(q_{n,n'})$, stat. Vert. (π_n)
Z.z.: Die 1. Randvert. von (π_n) erfüllt Gl.gew. bedingung für Station 1. (Übg.)

Theorem 2.2(a)

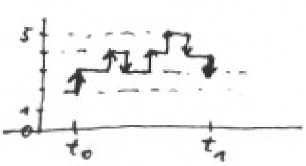
Sei $N_t := (N_1(t), \dots, N_J(t))$ der Gesamt-Prozess im Gleichgewicht.
$\underset{(L)}{\Rightarrow}$ $N_1(t)$ ist i. Gl.gew. $\underset{Th\,2.1}{\Rightarrow}$ Abgangsprozess von Stat. 1 ist Poisson(ν)-Prozess
<u>und</u> $N_1(t_0)$ ist st.u. vom Abg.proz. <u>vor</u> t_0
$N_2(t_0), \dots, N_J(t_0)$ hängt nur vom Abg.proz. (von Stat. 1) <u>vor</u> t_0 ab
$\Rightarrow N_1(t_0)$ und $(N_2(t_0), \dots, N_J(t_0))$ sind st.u. $\Rightarrow$ (Induktion) $N_1(t_0), \dots, N_J(t_0)$ st.u.
[Dazu: $(N_2(t_0), \dots, N_J(t_0))$ hat Eing.proz. $PP(\nu)$ und ist im Gleichgewicht (z.z.!)]

<u>Bemerkung:</u> 1. Ein Abgang von Station j z.Zt. t_0 hat W. 0.
2. Die stat. Vert. ist $\left(\pi(n_1, \dots, n_J) = \prod_{j=1}^{J} \left(1 - \frac{\nu}{\mu_j}\right)\left(\frac{\nu}{\mu_j}\right)^{n_j}\right)$
3. Die Prozesse $(N_1(t)), \dots, (N_J(t))$ sind <u>nicht</u> st.u.
4. Die Bedien-Stationen dürfen M/M/s/c sein.

<u>Theorem 2.2(b).</u> Wenn die Bed. Stat. 1, 2, …, J M/M/1/∞-Stationen sind mit FCFS Bedienregel, dann sind (i. Gl.gew.) die Verweilzeiten eines Kd. in den Stationen 1, 2, …, J st.u.

Beweis: 1. Beh.: Die Verweilzeit e. Kd. in M/M/1-FCFS ist st.u. vom Abgangsprozess <u>vor</u> seinem Abgang.
Dazu: Sei d. Ankunft dieses Kd. z.Zt. t_0, Abgang z.Zt. t_1.
$N(-t)$ ist stat. MPr. mit gleichem stoch. Verhalten, also o.E. M/M/1 [-FCFS]
$N(-t)$ hat Ank. z.Zt. $-t_1$, und Abgang <u>des selben</u>* Kd. z.Zt. $-t_0$
Seine* Verweilzeit ist st.u. von den Ankünften in $N(-t)$ <u>nach</u> $-t_1$ $\Rightarrow$ 1. Beh.

Zu *:



Sei $N(t_0) = j$, $N(t_1-) = k$, dazw. l Ank., m Abg.
$\Rightarrow j + l = k + m$. Wg. $m = j-1$ ist $l = k-1$
$\Rightarrow$ in $N(-t)$ ist z.Zt. $-t_0$ der k-te Abg. <u>nach</u> $-t_1$.

2. Beh.: Die Verweilzeit e. Kd. in Station 1 ist st.u. von <u>seinen</u> Verweilzeiten i.d. Stationen 2, 3, …, J. …(folgt aus 1. Beh.)
3. Beh.: Alle <u>seine</u> Verweilzeiten sind st.u. (folgt mit Induktion).

<u>Bemerkung:</u> Die letzte Station darf z.B. M/G/s/∞ sein: Th. 2.2 bleibt richtig.

Gerhard Hübner, Universität Hamburg,
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Stochastische Prozesse II

2 Stochastische Netzwerke: Migrationsprozesse

2.3 Geschlossene Migrationsprozesse: Gordon-Newell-Netze

Eine feste Anzahl N von Kunden wandert zwischen J Bedien-Stationen.
(In der Anwendung können Kd. gegen neue ausgetauscht werden.)

Modell: $\mathcal{S} = \{\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_J),\ n_j \geq 0,\ \sum_1^J n_j = N\}$. Übergänge $\left| \begin{array}{l} \mathbf{n} \mapsto T_{jk}\mathbf{n} \ :\Leftrightarrow \\ n_j \mapsto n_j - 1 \ \ n_k \mapsto n_k + 1 \end{array} \right.$

Ü-Raten: $q_{\mathbf{n}, T_{jk}\mathbf{n}} = \lambda_{jk}\, \varphi_j(n_j)$ mit $\varphi_j(0) = 0$ und $\lambda_{jj} = 0$, hier $\sum_k \lambda_{jk} = 1$. (2.1)

$\Rightarrow$ $\varphi_j(n_j)$ ist Abg.-Rate von Station j bei n_j Kd., λ_{jk} die W., nach k zu gehen.

Annahmen: $\varphi_j(n) > 0$ für $n > 0$ $(\forall j)$, (λ_{jk}) erlaubt Wege von jeder Stat. zu jeder.

Bemerkung: Bei $\varphi_j(n) = n$ $(\hat{=}\ M|M|\infty)$ bewegen sich alle Kd. unabh. voneinander.
Ist zudem $N = 1$, dann bildet der Ort des Kd. eine irred. hom. MK mit $I = \{1, \dots, J\}$, ÜM (λ_{jk}).
$\Rightarrow \exists_1$ (hierzu) e. stat. Vert. (α_j) auf I – mit $\alpha_j \underbrace{\sum_k \lambda_{jk}}_{=1} = \sum_k \alpha_k \lambda_{kj}$ und $\sum \alpha_j = 1$. (2.2)

Theorem 2.3: Unter obigen Voraussetzungen ex. e. stat. Vert. für $N(t)$

$$\pi(\mathbf{n}) = B_N \prod_{j=1}^J \alpha_j^{n_j} / (\varphi_j(1) \cdots \varphi_j(n_j)) \quad (\text{Nenner} = 1 \text{ f. } n_j = 0), \ \mathbf{n} \in \mathcal{S}. \quad (2.3)$$

Bemerkungen: 1. Das obige Modell heißt auch Gordon-Newell-Netz.
2. $\pi(\mathbf{n})$ ist keine Produkt-Dichte, weil $\mathcal{S}$ kein kartesisches Produkt ist.

Beweis: Die Gl.gew.bed. lautet: $\pi(\mathbf{n}) \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J q(\mathbf{n}, T_{jk}\mathbf{n}) = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J \pi(T_{jk}\mathbf{n})\, q(T_{jk}\mathbf{n}, \mathbf{n})$

eingesetzt: $\pi(\mathbf{n}) \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J \lambda_{jk}\, \varphi_j(n_j) = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J \pi(T_{jk}\mathbf{n})\, \lambda_{kj}\, \varphi_k(n_k + 1)$ (2.4)

Dies gilt auch ohne „$\sum_{j=1}^J$“: setze $\pi(T_{jk}\mathbf{n}) = \pi(\mathbf{n}) \dfrac{\alpha_k}{\varphi_k(n_k+1)} \cdot \dfrac{\varphi_j(n_j)}{\alpha_j}$ (n. (2.3) u. (2.2))

Folgerung: Der Prozess $N(t)$ ist reversibel, falls $\alpha_j \lambda_{jk} = \alpha_k \lambda_{kj}$ $(\forall j, k)$.
Beweis: Wie oben folgt (ohne $\sum_k$) $\pi(\mathbf{n})\, \lambda_{jk}\, \varphi_j(n_j) = \pi(T_{jk}\mathbf{n})\, \lambda_{kj}\, \varphi_k(n_k + 1)$ (2.6)

Bemerkung: Die (sogenannte) partielle Gl.gew.bed. (2.5) $(= (2.4)$ ohne $\sum_j)$

$$\pi(\mathbf{n}) \sum_{k=1}^J \lambda_{jk}\, \varphi_j(n_j) = \sum_{k=1}^J \pi(T_{jk}\mathbf{n})\, \lambda_{kj}\, \varphi_k(n_k + 1) \quad (2.5)$$

beschreibt den Abgang / Zugang eines Kd. bei Station j im Zustand $\mathbf{n}$,
während $\sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{S}} \pi(\mathbf{n}) \sum_{k=1}^J \cdots = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{S}} \sum_{k=1}^J \cdots$ (2.7)
den Abgang / Zugang eines Kd. bei Station j global beschreibt (i. Gl.gew.)
Die zweite Aussage ist für allgemeine Systeme erfüllt u. einleuchtend.

Beispiel: Zyklische Bedien-Netze: $\lambda_{j,j+1} = 1$ $0 < j < J$, $\lambda_{J1} = 1$ $(\Rightarrow \alpha_j = \frac{1}{J})$.
Speziell: 1. N Teile, n_1 in Gebrauch, n_2 in Reparatur, $\varphi_j(n_j) = \min(n_j, s_j)\, \mu_j$.
2. J Maschinen, N Werkstücke ... $\Rightarrow \varphi_j(n_j) = \mu_j$ für $n_j > 0$.