

Stochastische Prozesse II

1.5* Stochastische Netzwerke: Kolmogorov's Kriterien für Reversibilität *A.4 wird hier nicht behandelt

Theorem 1.7: (X_t) stationäre MK (diskr. Zeit):

(X_t) reversibel $\Leftrightarrow p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_n i_1} = p_{i_1 i_n} \cdots p_{i_2 i_1} \quad \forall i_1, \dots, i_n \in \mathcal{I} \quad (*)$
d.h. für alle geschlossenen Wege ist das Produkt in beiden Richtungen gleich.

Theorem 1.8: (X_t) stationärer MPr (stetige Zeit):

(X_t) reversibel $\Leftrightarrow q_{i_1 i_2} \cdots q_{i_n i_1} = q_{i_1 i_n} \cdots q_{i_2 i_1} \quad \forall i_1, \dots, i_n \in \mathcal{I} \quad (**)$.

Bemerkung: Man muss nur „minimale“ geschlossene Wege testen!

Beweis (nur für MK): (a) MK reversibel $\Rightarrow \pi_j p_{jk} = \pi_k p_{kj} \Rightarrow$ Produkte gleich.

Zurückbemerkung: Falls MK reversibel, $p_{j_1 j_n} p_{j_n j_{n-1}} \cdots p_{j_2 j_1} > 0 \quad (j_1, j_2, \dots, j_n \in \mathcal{I})$,

dann gilt: $\pi_j = \pi_{j_0} \frac{p_{j_0 j_1} \cdots p_{j_{n-1} j}}{p_{j_1 j_n} \cdots p_{j_2 j_1}}$ (rekursiv für $k=0, 1, \dots, n$)

(b) Es gelte (*). Wähle j_0 fest. Zu $j \in \mathcal{I}$ ex. $j_1, \dots, j_n$ mit $p_{j_1 j_n} \cdots p_{j_2 j_1} > 0$.

Setze $\pi_j = B \frac{p_{j_0 j_1} \cdots p_{j_{n-1} j}}{p_{j_1 j_n} \cdots p_{j_2 j_1}}$ mit $B > 0$.

(b1) π_j ist unabh. von $j_1, \dots, j_n$: Aus (*) folgt $\pi_j = \tilde{\pi}_j$ (mit $\tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_n$).

(b2) π_j ist positiv: Sei $j_1, j_2, \dots, j_n$ wie oben, es ex. „Rückweg“ $j_0, i_1, \dots, i_n, j$
mit pos. W. $\Rightarrow p_{j_1 j_n} \cdots p_{j_2 j_1} p_{j_0 i_1} \cdots p_{i_n j} > 0 \xrightarrow{(*)} \underbrace{p_{j_1 j_n} \cdots p_{j_2 j_1}}_{>0} \underbrace{p_{j_0 i_1} \cdots p_{i_n j}}_{>0} > 0 \Rightarrow \text{Zähler} > 0$

(b3) (π_j) erfüllt $\pi_i p_{ik} = \pi_k p_{ki} \quad \forall i, k$: Fall 1: $p_{ik} = p_{ki} = 0$

Fall 2: $p_{ki} > 0$: $\pi_k = B \frac{p_{j_0 j_1} \cdots p_{j_{n-1} k}}{p_{k i_1} p_{i_2 j_1} \cdots p_{j_2 j_1}} \quad (\text{Nenner} > 0) = \pi_i \frac{p_{ik}}{p_{ki}}$

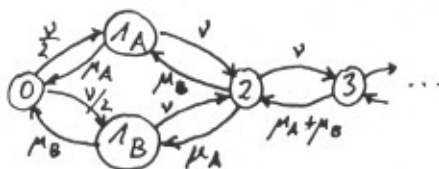
(b4) $\sum \pi_j < \infty$: Aus $\pi_i p_{ik} = \pi_k p_{ki} \quad \forall i, k$ folgt $\sum \pi_i p_{ik} = \sum \pi_k p_{ki}$ (Gl. gew. bed.)

Da (X_t) stationär, ex. stat. Vert. $\Rightarrow \sum \pi_j < \infty \Rightarrow \sum \pi_j = 1$ mit geeign. B.

(b5) (X_t) ist reversibel, da $(\pi_j), (p_{ik})$ die Bed. $\pi_i p_{ik} = \pi_k p_{ki} \quad \forall i, k$ erfüllen.

Beispiel: $M|M|2|\infty$, aber Bedienraten $\mu_A \neq \mu_B$ für Bediener A, B

Bei Ankunft im leeren System Zuordnung zu A, B mit W. $\frac{1}{2}$.



(X_t) sei stationär:

Man muss nur $\diamond$ testen!

$$\frac{v}{2} \cdot v \cdot \mu_A \cdot \mu_B \stackrel{!}{=} \frac{v}{2} \cdot v \cdot \mu_B \cdot \mu_A$$

$\Rightarrow (X_t)$ ist reversibel (nur für W. = $\frac{1}{2}$).

Stationäre Verteilung: $k \geq 2$: $\pi_k = \left(\frac{v}{\mu_A + \mu_B} \right)^{k-2} \cdot \pi_2$

$$\pi_{1A} = \pi_2 \cdot \frac{\mu_B}{v}, \quad \pi_{1B} = \pi_2 \cdot \frac{\mu_A}{v}, \quad \pi_0 = \pi_{1A} \cdot \frac{\mu_A}{v/2} = \frac{2\mu_A \mu_B}{v^2} \pi_2$$

Stochastische Prozesse II

1.6 Stochastische Netzwerke: Restriktion des Zustandsraums

Gelegentlich will man den Zustandsraum verkleinern.

Kann man dann die Ergebnisse, z.B. „stationäre Verteilung“, „Reversibilität“, ganze oder teilweise übernehmen?

Der wichtigste Satz erscheint bei Kelly als „Folgerung 1.10“:

Wenn der verkleinerte Zustandsraum irreduzibel ist, dann bleibt Reversibilität erhalten und die stat. Verteilung wird nur neu normiert.

Bekanntes Beispiel: $M/M/1/\infty$ wird auf $M/M/1/c$ verkleinert.

Der allgemeine Fall beginnt mit einer Vorbemerkung und einem Lemma.

Vorbemerkung: (X_t) sei rev. MPr mit Raten (q_{jk}) . Ändert man für $j, k \in \mathcal{I}$ $q_{j,j}$ und $q_{j,j}$ in $c q_{j,j}$ und $c q_{j,j}$, dann bleibt (X_t) reversibel mit gleicher stat. Vert. (π_j) .

Lemma 1.9: (X_t) rev. MPr mit (q_{jk}) , $A \subset \mathcal{I}$, $c > 0$, $q'_{jk} := c q_{jk}$, falls $j \in A, k \in \mathcal{I} \setminus A$, sonst $= q_{jk}$, dann ist (X_t) mit (q'_{jk}) reversible MPr mit stat. Vert. (π'_j) :

$$\pi'_j = B \pi_j, j \in A, \pi'_j = B c \pi_j, j \in \mathcal{I} \setminus A \quad B \text{ konst., genauer: } B = \left(\sum_{j \in A} \pi_j + c \sum_{j \in \mathcal{I} \setminus A} \pi_j \right)^{-1}.$$

Beweis: Prüfe lokale Gl. Gew. Bed. $\pi'_j q'_{jk} = \pi'_k q'_{kj}$.

Korollar 1.10: Lemma 1.9 gilt auch für $c = 0$, falls X_t auf A irreduzibel, und es gilt $\pi'_j = \pi_j / \sum_{k \in A} \pi_k$, $j \in A$, die bedingte W. unter $\{X_t \in A\}$.

Beispiel: Zwei (st. u.) $M/M/1/\infty$ -Bediensysteme mit gemeinsamem Warteraum.

A: Unbeschränkter Warteraum: Die Bediensysteme sind st. u.

System: mit Ank./Bed.-Rate $\nu_i, \mu_i \Rightarrow \mathcal{I} = \{(n_1, n_2), n_i \in \mathbb{N}_0\}$

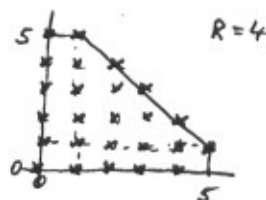
stationäre Verteilung: $\pi_{(n_1, n_2)} = \left(1 - \frac{\nu_1}{\mu_1}\right) \left(\frac{\nu_1}{\mu_1}\right)^{n_1} \left(1 - \frac{\nu_2}{\mu_2}\right) \left(\frac{\nu_2}{\mu_2}\right)^{n_2}, (n_1, n_2) \in \mathcal{I}$

B: Gemeinsamer Warteraum mit R Plätzen:

$\Rightarrow n_1 \leq 1+R, n_2 \leq 1+R, n_1+n_2 \leq 2+R$ für $(n_1, n_2) \in A$

(X_t) stationär $\Rightarrow (X_t)$ reversibel (da A irreduzibel)

stat. Vert.: $\pi'_{(n_1, n_2)} = \pi_{(0,0)} \left(\frac{\nu_1}{\mu_1}\right)^{n_1} \left(\frac{\nu_2}{\mu_2}\right)^{n_2}, (n_1, n_2) \in A$



Stochastische Prozesse II

1.7 Stochastische Netzwerke: Zeitumkehrung

Vorbem.: (X_t) Markovsch $\Rightarrow (X_{t-t})$ Markovsch (Zukunft u. Vergangenheit vertauscht)

Lemma 1.11: (X_t) MPr (zeitl. homogen) nicht stat. $\Rightarrow (X_{t-t})$ MPr nicht zeitl. homogen.

Beweis: $P(X_t=j)P(X_{t+h}=k|X_t=j) = P(X_{t+h}=k)P(X_t=j|X_{t+h}=k)$, kurz (1)(2) = (3)(4). (*)

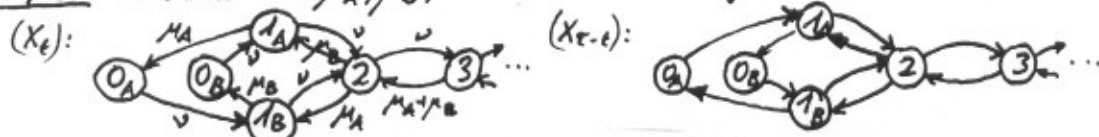
(2) ist a.v. unabh. von $t \Rightarrow (4)$ ist unabh. von t , falls $\frac{(1)}{(3)}$ unabh. von t ($\forall j, k$)

Falls (X_t) nicht stationär, ex. j, k, δ mit $(\tilde{j}) := P(X_{t+\delta}=j) > (1)(\tilde{3}) := P(X_{t+\delta+\delta}=k) < (2)$.

Theorem 1.12: (X_t) stat. MPr mit $(q_{jk}), (\pi_j) \Rightarrow (X_{t-t})$ stat. MPr mit $\pi'_j = \pi_j, q'_{jk} = \frac{\pi_k q_{kj}}{\pi_j}$.

Beweis: (X_{t-t}) stat. MPr (s.o.) $\Rightarrow \pi'_j = \pi_j, q'_{jk} = \dots$ folgt aus (1)/h mit $h \rightarrow 0$.

Beispiel: 2 Bediener mit μ_A, μ_B , Ank.rate ν . Zuordnung i. Zust. 0 zum länger freien B.



stat. Vert. (π_j) : (mit Schritten) $n \geq 2: \pi_n = \pi_2 \left(\frac{\nu}{\mu_A + \mu_B} \right)^{n-2}$, dann $0_A, 0_B, 1_A, 1_B, \dots$

$\Rightarrow \pi_{1A} = \pi_2 \left(\frac{\mu_B}{\nu} \right), \pi_{1B} = \pi_2 \left(\frac{\mu_A}{\nu} \right), \pi_{0A} = \frac{\mu_A \mu_B}{\nu^2} \pi_2 = \pi_{0B}$. Daraus $q'_{jk} = \dots$

Bemerkung: Aus Th. 1.12 folgt $q_j = q'_j$. $\left[q'_j = \sum_k q'_{jk} = \sum_k \frac{\pi_k q_{kj}}{\pi_j} \stackrel{(1) \text{ stat.}}{=} \frac{1}{\pi_j} \sum_k \pi_j q_{kj} = q_j \right]$

Theorem 1.13: (X_t) stat. MPr mit (q_{jk}) . Falls (q'_{jk}) und (π'_j) ex. mit $\sum \pi'_j = 1$ und

$\left\{ \begin{array}{l} (1.27) \sum_k q'_{jk} = \sum_k q_{jk} \\ (1.28) \pi'_j q_{jk} = \pi'_k q_{kj} \end{array} \right\}$, dann sind (q'_{jk}) U-Raten von (X_{t-t}) und $(\pi_j) = (\pi'_j)$.

Bemerkung: Man darf (q'_{jk}) und (π'_j) "raten" und mit (1.27), (1.28) nachprüfen!

Beweis: Wg. $\sum_j \pi'_j q'_{jk} \stackrel{(1.27)}{=} \pi'_k \sum_j q_{jk} \stackrel{(1.28)}{=} \pi'_k \sum_j q_{kj}$ ist $\pi'_j = \pi_j$, dann mit Th. 1.12.

Definition: (motiviert durch obiges Beispiel) (X_t) ist dynamisch reversibel,

falls e. Abb. $j \rightarrow j^+$ ex. mit $(j^+)^+ = j$ und $(X_t) \sim (X_{t-t})$

Beispiele: 1. (s.o.) 2.

Theorem 1.14: (X_t) stat. MPr $q(j) = q(j^+)$. (X_t) ist dynamisch reversibel

$\Leftrightarrow$ Es ex. (π_j) mit $\sum \pi_j = 1, \pi_j = \pi_{j^+}$ und $\pi_j q_{jk} = \pi_{k^+} q_{k^+j^+}$ [$\Rightarrow (\pi_j)$ stat. Vert.]

Beweis: " $\Rightarrow$ " mit $\pi_j := P(X_t = j)$

" $\Leftarrow$ " mit $q'_{kj} := q_{k^+j^+} \Rightarrow q'_{kj} = \frac{\pi_j}{\pi_{k^+}} q_{jk} = \frac{\pi_j}{\pi_{k^+}} q_{jk}$ und $q'_j = \sum_k q'_{jk} = \sum_k q_{j^+k^+} = q_{j^+} = q_j$

$\stackrel{\text{Th. 1.13}}{\Rightarrow} (q'_{jk})$ ist U-R-Matrix zu X_{t-t}^+ und (π_j) ist stat. Verteilung.

Mit $q'_{kj} = q_{k^+j^+}$ folgt "dynamisch reversibel".