

Stochastische Prozesse II

1.3 Stochastische Netzwerke: Eigenschaften von Bediensystemen

Sei $(X(t))$ ein MPr (HMKS) mit $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots, K\}$ oder $\{0, 1, 2, \dots\}$, $q_{i,k} = 0$, falls $|i-k| \neq 1$,
dann gilt: „ $(X(t))$ stationär“ $\Leftrightarrow$ „ $(X(t))$ reversibel“ $\Leftrightarrow \pi_j q_{j,j-1} = \pi_{j-1} q_{j-1,j} \quad \forall j > 0$.

$$\Rightarrow \pi_j = \pi_0 \prod_{i=1}^j \frac{q_{i-1,i}}{q_{i,i-1}} =: \pi_0 \cdot \alpha_j \quad \left| \begin{array}{l} \sum \alpha_j = \infty \Rightarrow \text{stat. Vert.} \\ \sum \alpha_j < \infty \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{\sum \alpha_j} \end{array} \right.$$

Beispiel 1:

M/M/1 (oder M/M/1/ ∞) Poisson-Ankunft, Rate ν Bedienzeit $\sim \text{Exp}(\mu)$
st. u., auch von Ank. proz.

$\Rightarrow (X_t)$ ist GuT-Prozess mit $q_{j,j-1} = \mu \quad j=1,2,\dots$, $q_{j,j+1} = \nu, \quad j=0,1,2,\dots$

$$\left[\pi_j = \left(1 - \frac{\nu}{\mu}\right) \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^j \quad (j=0,1,2,\dots) \right] \quad \left(\text{Geo}\left(1 - \frac{\nu}{\mu}\right) \right) \quad EX_t = \frac{\nu}{\mu - \nu} = \frac{\nu/\mu}{1 - \nu/\mu}.$$

Verweilzeit W (eines „typischen“ Kunden)

Zunächst: Annahme: Der Kunde hat j Kd. vorsich mit W . π_j (er trifft (X_t) im Gl.gew. an).
 $\Rightarrow P(W \leq w) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \left(\sum_{\ell=1}^{j+1} B_{\ell} \leq w \right) \stackrel{!}{=} 1 - e^{-(\mu - \nu)w} : \boxed{W \sim \text{Exp}(\mu - \nu)}$

Def.: „Typischer Kunde“. Der Kunde (oder d. Beob. e. Ankunft) hat keine Information über den Prozess.

Satz: Bei Poisson-Ankunft trifft ein typischer Kunde den Proz. im Gl.gew. an.

Anschaulich: Der Prozess u. die Ankunft sind stoch. unabhängig?

$$\text{Formal: } P(X_t = j \mid \text{Ankunft in } (t, t+h)) = \frac{\pi_j (\nu h + o(h))}{\sum_k \pi_k (\nu h + o(h))} = \pi_j.$$

Beobachtung: $EW = E(X_t)/\nu$ bzw. $EX_t = \nu \cdot EW$. ($EW = \frac{1}{\mu - \nu}$, $EX_t = \frac{\nu}{\mu - \nu}$)

Satz von Little: Beliebiges Bediensystem, langfristige Durchschnitte konvergent,
 $\bar{\lambda}$ = mittlere Ankunftsrate, EX_t mittl. Kd.zahl, EW Verweilzeit,
 $\Rightarrow EW = E(X_t)/\nu$

Allgem. Beweis: $Y_t := \text{Zahl d. Ank. hist.}$, $G_t = \int_0^t X_s ds$ Ges.-Kd.-Zeit.

$$\Rightarrow W_t = G_t/Y_t \rightarrow EW, \quad G_t/t \rightarrow EX_t, \quad Y_t/t \rightarrow \bar{\nu} \Rightarrow EW = EX_t/\bar{\nu}.$$

Speziell für M/M/1 mit FCFS: Ein abgehender Kd. hinterlässt i. Mittel EX_t Kd. (s. u.)
Diese sind während seiner Verweilzeit W mit Rate ν angekommen.

Beispiel 2: Telefon-Vermittlung, K Leitungen: M/M/K/0

(X_t) GuT-Prozess, $q_{j,j-1} = j\mu \quad j=0,1,\dots,K$, $q_{j,j+1} = \nu, \quad j=0,1,\dots,K-1$

$\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, K\}$ (ankommende Kd. bei vollen System werden abgewiesen).

$$\Rightarrow \pi_j = \pi_0 \frac{1}{j!} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^j, \quad j \in \mathcal{S}. \quad \text{Voller System: } \pi_K = \frac{(\nu/\mu)^K / K!}{\sum_{j=0}^K (\nu/\mu)^j / j!}.$$

mittl. Ankunftsrate (im System) $\bar{\nu} = \nu(1 - \pi_K)$.